



Commande non lineaire robuste des robots manipulateurs

Claude Samson

► To cite this version:

Claude Samson. Commande non lineaire robuste des robots manipulateurs. [Rapport de recherche] RR-0182, INRIA. 1983. inria-00076376

HAL Id: inria-00076376

<https://inria.hal.science/inria-00076376>

Submitted on 24 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



CENTRE DE RENNES
IRISA

Rapports de Recherche

N° 182

**COMMANDE
NON LINÉAIRE ROBUSTE
DES ROBOTS MANIPULATEURS**

Institut National
de Recherche
en Informatique
et en Automatique

Domaine de Voluceau
Rocquencourt
B.P. 105
78153 Le Chesnay Cedex
France
Tél 954 90 20

Claude SAMSON

Janvier 1983

COMMANDE NON LINÉAIRE ROBUSTE DES ROBOTS MANIPULATEURS

Claude SAMSON

I.R.I.S.A.

Résumé :

Nous nous intéressons dans cet article au problème de la commande de robots manipulateurs. Dans un premier temps, une étude théorique permet de définir une classe importante de commandes stables et robustes pour un système non-linéaire dont les équations englobent les équations dynamiques des manipulateurs rigides. Des conditions suffisantes pour réaliser une bonne poursuite d'un modèle de référence linéaire et invariant sont démontrées. Les propriétés de stabilité et de robustesse de plusieurs schémas de commande proposés dans la littérature (dont des schémas de commande adaptative) sont analysées de façon rigoureuse. Il apparaît que le calcul de commandes stables ne requiert pas nécessairement une connaissance importante du système que l'on veut commander. L'utilisation dans la pratique de schémas de commande très simples trouve de cette façon justification. Une commande mieux conditionnée vis à vis des bruits de mesure est cependant obtenue lorsqu'une bonne modélisation du système est utilisée dans le calcul de la commande. Une méthode pour compenser les défauts de modélisation, sans avoir à utiliser systématiquement des grands gains dans la commande, consiste à calculer des gains variables qui prennent des valeurs importantes seulement aux endroits névralgiques de la trajectoire du manipulateur. Des indications sont données pour la mise en oeuvre de cette méthode dans la pratique.

Abstract :

This article addresses the problem of controlling robotic manipulators. A preliminary theoretical study is conducted so as to determine a large set of stable and robust controls for a non-linear system whose equations encompass the dynamic equations of any rigid element manipulator. Sufficient conditions for obtaining a good tracking of a linear time-invariant model of reference are derived. An interesting property is that the computation of stable controls does not necessarily require an important knowledge of the system; which justifies the use of very simple control schemes in practice. However, a control better conditioned with respect to measurement noises is obtained when a good model of the system is used in the control derivation. Between these two alternatives lies the idea of using adjustable control gains that become large when needed and stay small otherwise. In light of this study, several control schemes proposed in the litterature on the subject (including adaptive control schemes) are discussed and conclusions are drawn with a view to future studies.



I - Introduction

Nous nous intéressons dans cette étude au problème de la commande de manipulateurs. Tant qu'un manipulateur reste un automate devant réaliser une tâche spécifique et répétitive (tel que le transport à faible vitesse d'un objet de masse et de géométrie connues, d'un point de départ à un point d'arrivée selon une trajecture invariante fixée à l'avance), le problème de commande de ce manipulateur est un problème bien conditionné pouvant être résolu simplement par des techniques classiques de commande de systèmes linéaires.

La simplicité du problème, dans ce cas, provient principalement de la conjonction de deux facteurs bénéfiques qui sont :

- i) le manque de souplesse d'emploi du manipulateur ;
- ii) la demande de performances modestes qui permettent de négliger ou de satisfaire les contraintes technologiques liées à la conception des divers éléments du manipulateur.

Actuellement, la plupart sinon la quasi-totalité des manipulateurs utilisés dans l'industrie ou proposés sur le marché est conçue selon le principe précédent. Dans la mesure où ces manipulateurs répondent de façon satisfaisante aux besoins de leurs utilisateurs, cela signifie que pour un certain nombre d'applications il n'est pas forcément utile d'aller plus loin dans le degré de sophistication des manipulateurs. Il est cependant évident que le produit crée aussi le besoin et qu'un grand nombre d'applications potentielles n'a pas encore vu le jour parce que les manipulateurs de la génération actuelle ne possèdent ni les caractéristiques mécaniques physiques, ni la souplesse, ni les performances qu'exigeraient de telles applications. Il paraît par conséquent important d'engager dès à présent des études prospectives servant en quelque sorte à "défricher le terrain" et aidant à cerner plus en profondeur les problèmes liés à la conception de futures générations de manipulateurs.

Pour ce qui concerne le problème particulier de commande, il est déjà utile de réaliser que ce problème est a priori difficile. Pour illustrer les difficultés de natures multiples inhérentes au problème, nous nous aiderons de la figure 1 où nous avons représenté, du point de vue de la commande, les trois blocs principaux constitutifs d'un manipulateur, ainsi que les six possibilités de commande par retour d'état de ces trois blocs.

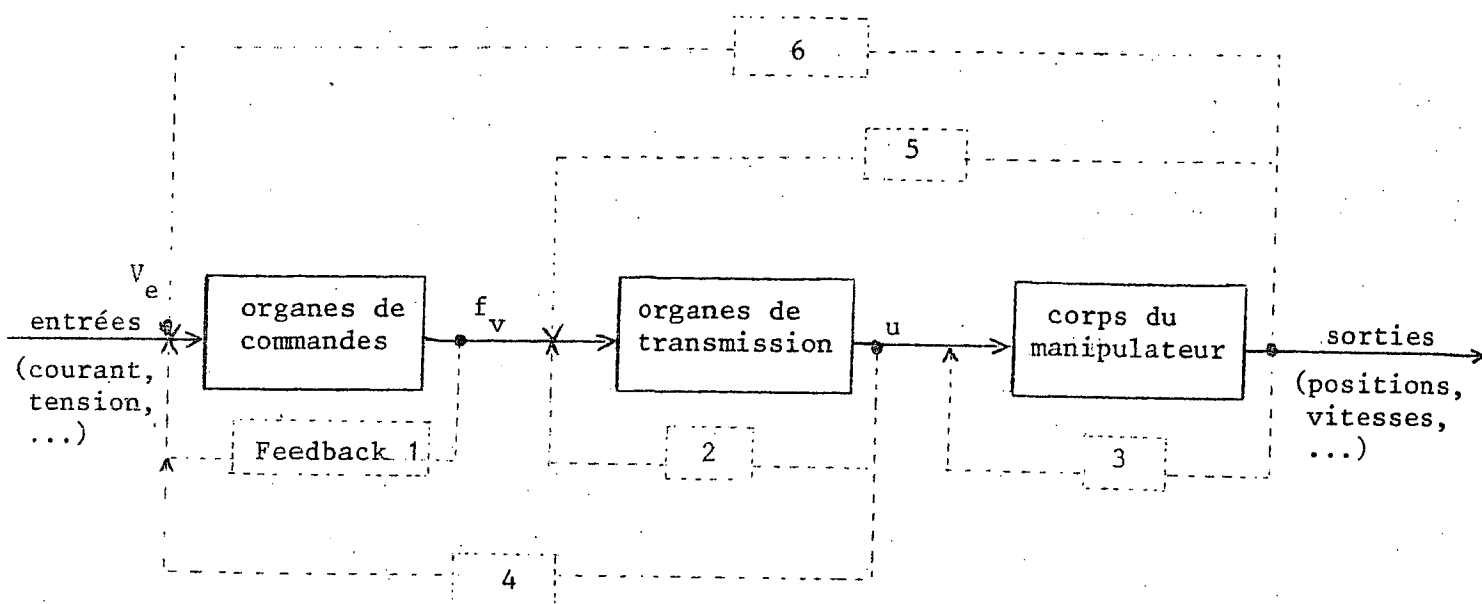


Figure 1

Le premier bloc est constitué des organes de commande du manipulateur (par exemple : moteurs électriques, vérins hydrauliques). Le rôle des organes de commande est de générer les forces et couples permettant de déplacer les membres du manipulateur. Au mieux, les équations entrées-sorties des organes de commande seront linéaires. Très souvent ces équations seront non linéaires et ne pourront être connues que de façon approximative. Il faudra aussi tenir compte, dans l'élaboration de la commande du manipulateur, de la dynamique limitée des moteurs ainsi que de leur saturation éventuelle.

Les forces et couples produits par les organes de commande sont appliqués aux membres du manipulateur par le biais des organes de transmission (courroies, engrenages, ...). Ces forces et couples peuvent subir au niveau de la transmission des dégradations dues par exemple à l'élasticité des courroies ou aux phénomènes d'hystérésis provenant de jeux dans les engrenages. Ces altérations auront classiquement pour effet de produire des vibrations ou de réduire la précision des mouvements.

Enfin, en bout de chaîne, nous trouvons le corps du manipulateur proprement dit dont les différents éléments sont actionnés par les forces et couples transmis. A ce niveau, nous pouvons encore définir deux classes de manipulateurs :

- i) les manipulateurs dits "rigides" (ou indéformables). La plupart des manipulateurs actuels appartiennent à cette classe ;
- ii) les manipulateurs dits "souples" (ou déformables). Ce dernier type de manipulateur a de fortes chances de se développer dans l'avenir surtout pour certaines applications requérant des bras légers ou des bras de

grande taille (tel que celui de la navette spatiale américaine). Il est clair que les manipulateurs souples posent des problèmes difficiles de commande, surtout si les performances demandées sont élevées (risque d'excitation des modes souples, etc). [1] - [2] .

La présentation succincte que nous venons de donner d'un manipulateur met en évidence un ensemble de difficultés propres à chaque partie du manipulateur et dont il faut tenir compte dans l'élaboration de la commande complète du manipulateur. Il apparaît qu'un grand nombre de ces difficultés sont de nature mécanique ou technologique (limitations, non linéarités et saturations des moteurs, élasticité des transmissions, souplesse du manipulateur ; ...) et qu'elles peuvent par conséquent être surmontées en partie au niveau de la conception physique du manipulateur. Il n'en demeure pas moins que certaines de ces difficultés ne pourront pas être totalement surmontées, soit parce que nous ne disposons pas actuellement d'une technologie suffisante, soit parce que la solution technologique entraînerait un coût prohibitif. La question est alors de savoir s'il est possible, par le biais de la technique de commande, de palier à certains défauts ou à certaines faiblesses de conception du manipulateur.

Comment aborder pratiquement le problème de commande ? Une approche sensée consiste à essayer de découpler dans un premier temps les difficultés du problème en fonction de leur nature. La figure 1 suggère un tel découplage. Elle suggère en effet de tenter de traiter séparément chacun des trois blocs constitutifs du manipulateur puis de raccorder les solutions obtenues. La commande de chaque bloc peut se faire en boucle ouverte (c'est-à-dire à l'aide de relations explicites entre les entrées et les sorties du bloc), soit en boucle fermée à l'aide d'un retour d'état. Il est bien connu que la solution par retour d'état sera en général préférable à la solution de commande en boucle ouverte pour des raisons de robustesse de la commande et d'insensibilité vis à vis des perturbations extérieures. La commande par retour d'état pose cependant le problème de la mesure ou de l'estimation de l'état à partir de grandeurs mesurées, ce problème étant à son tour étroitement lié au problème de réalisation et d'utilisation de capteurs. Par exemple commander par retour d'état les blocs des organes de commandes suppose de pouvoir mesurer les forces et couples produits par les moteurs. Il se peut aussi qu'en dernier ressort, la structure du manipulateur interdise de commander chaque bloc séparément. Il faut alors traiter le manipulateur dans son ensemble en partant d'un modèle global du manipulateur (qui sera presque toujours très non linéaire d'ordre élevé) et essayer par approximations successives de se ramener à un modèle plus simple.

Il est clair que les deux premiers blocs constitutifs du manipulateur dépendent de la technologie employée pour commander le manipulateur. Un moteur électrique ne vérifie pas les mêmes équations qu'un vérin hydraulique et une courroie de transmission n'a pas les mêmes propriétés qu'une transmission par engrenages. Il est par conséquent vain de vouloir définir une approche générale pour la commande de ces deux blocs. Une étude spécifique devra être faite pour chaque type de manipulateur. En revanche, le dernier bloc constitutif du manipulateur, dont les équations sont les équations de la dynamique des divers membres du manipulateur, est un bloc commun à tous les manipulateurs. Nous pouvons donc essayer pour cette partie de dégager une méthode de commande qui aura l'avantage d'être applicable à tout manipulateur. Nous nous intéressons dans la suite de cet article à la commande de cette partie du manipulateur que nous supposerons rigide.

Il est bien connu que les équations du mouvement d'un manipulateur (rigide ou non) sont fortement non-linéaires. La plupart des commandes proposées jusqu'à présent sont de trois types : i) les commandes à coefficients constants, type P.I.D. ; ii) les commandes "dynamiques" calculées à partir du modèle mathématique du manipulateur [3] - [7] ; iii) les commandes adaptatives basées sur une identification en ligne de la structure du manipulateur ou de la structure du régulateur [8] - [11]. Il est montré dans [12] que l'ensemble de ces commandes peut être regroupé dans une approche générale basée sur le découplage linéaire des équations dynamiques du manipulateur et sur le choix plus ou moins complexe d'une modélisation physique du manipulateur.

La présente étude est en partie motivée par la constatation qu'aucune analyse de stabilité et de robustesse n'existait jusqu'à présent pour ces schémas de commande. Les commandes à coefficients constants qui sont les plus simples sont obtenues à partir de considérations heuristiques. Les commandes dynamiques sont obtenues à partir de l'hypothèse de la connaissance exacte à chaque instant du modèle mathématique du manipulateur. Dans la mesure où tout modèle est par nature imparfait, il est important de savoir pourquoi et jusqu'où ces commandes continuent de bien fonctionner. Les analyses de stabilité proposées pour les schémas de commande adaptative sont en réalité des pseudo-analyses de stabilité parce que la stabilité est seulement démontrée sous l'hypothèse non réaliste que le manipulateur peut être modélisé par un système linéaire invariant [8] - [9].

Cet article est organisé de la façon suivante. Nous étudions au chapitre II le problème de la commande d'un système non linéaire de forme générale dont les équations englobent celles des manipulateurs rigides. Une étude heuristique rapide permet dans un premier temps de cerner l'ensemble des commandes pour lesquelles nous pouvons espérer démontrer des propriétés de stabilité. Ensuite des conditions suffisantes de stabilité sont données dans l'énoncé d'un théorème qui permet de définir une classe large de commandes non linéaires stables et robustes. Cette classe de commandes est encore élargie par l'intermédiaire de quatre corollaires du théorème précédent. La démonstration de ce théorème fait appel à des techniques utilisées par Kokotovic pour l'étude des systèmes à deux échelles de temps [13][14]. La robustesse locale des commandes à grands gains constants est analysée de façon formelle. Une alternative de ces commandes à grands gains consiste à utiliser des commandes non linéaires dont les gains ajustables peuvent être calculés à partir d'une connaissance minimale du système à commander.

Nous explorons au chapitre III l'application des résultats théoriques du chapitre précédent au problème plus spécifique de la commande de manipulateurs. Cette étude éclaire sous un jour différent les études de commandes adaptatives faites sur les manipulateurs. Elle suggère en effet que la bonne prestation de certains schémas de commande adaptative proposés dans la littérature sont moins le fait d'une bonne qualité d'adaptation que l'obtention heureuse de grands gains rendant ces commandes robustes. Des indications pratiques sont données sur la façon d'exploiter les propriétés structurelles des manipulateurs pour le calcul et le réglage de commandes non linéaires stables. Il est enfin montré que l'analyse du chapitre II s'applique encore dans le cas de commandes calculées à partir des coordonnées opérationnelles du manipulateur.

II - Etude d'un problème général de commande non linéaire

2 - 1 Position du problème

Nous nous intéressons dans cette partie à l'étude des trajectoires $(x(t), \dot{x}(t))$ sur un intervalle de temps $[0, T[$ d'un système ayant la forme suivante:

$$(2.1) \quad M(x(t), \dot{x}(t), t) \ddot{x}(t) + E(x(t), \dot{x}(t), t)x(t) + F(x(t), \dot{x}(t), t)\dot{x}(t) + G(x(t), \dot{x}(t), t) = u(x(t), \dot{x}(t), t)$$

et tel que:

H₁ : $M(\cdot), E(\cdot), F(\cdot), G(\cdot)$ sont des fonctions à valeurs matricielles réelles de $(y_1, y_2, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, T[$, continues en y_1 et y_2 , bornées uniformément par rapport à t .

H₂ : $M(y_1, y_2, t)$ est une matrice symétrique définie positive (s.d.p.) telle que $\|M^{-1}(\cdot)\|$ est bornée supérieurement sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, T[$ par un réel positif $\frac{1}{\sigma}$.

(Dans la suite de ce rapport $\|\cdot\|$ désigne soit la norme euclidienne d'un vecteur de \mathbb{R}^n soit la norme matricielle associée).

Nous cherchons à générer une commande $u(x(t), \dot{x}(t), t)$ qui permettent aux trajectoires $(x(t), \dot{x}(t))$ du système (2.1) de "suivre" les trajectoires $(x_r(t), \dot{x}_r(t))$ d'un "modèle de référence" ayant pour équation:

$$(2.2) \quad \ddot{x}_r(t) = u_r(t)$$

et tel que $x_r(\cdot), \dot{x}_r(\cdot), \ddot{x}_r(\cdot)$ sont uniformément bornés.

Tout autre modèle de référence satisfaisant les conditions de Erzberger [15] avec le système (2.2) est aussi admissible.

Nous notons:

$$(2.3) \quad \varepsilon(t) = x(t) - x_r(t)$$

l'erreur de poursuite en position

$\dot{\varepsilon}(t)$ est l'erreur de poursuite en vitesse et $\ddot{\varepsilon}(t)$ l'erreur de poursuite en accélération.

Pour effectuer la poursuite du modèle de référence (2.2) nous nous donnons un ensemble de commandes possibles de la forme suivante:

$$(2.4) \quad u(x(t), \dot{x}(t), t) = \hat{M}(x(t), \dot{x}(t), t) \left[-k_p(x(t), \dot{x}(t), t) \varepsilon(t) - k_v(x(t), \dot{x}(t), t) \dot{\varepsilon}(t) \right] \\ + \hat{E}(x(t), \dot{x}(t), t) x(t) + \hat{F}(x(t), \dot{x}(t), t) \dot{x}(t) + \hat{H}(x(t), \dot{x}(t), t)$$

et tel que

H₃ : $\hat{M}(\cdot)$, $\hat{E}(\cdot)$, $\hat{F}(\cdot)$, $\hat{H}(\cdot)$ sont des fonctions à valeurs matricielles réelles; de $(y_1, y_2, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, T[$, continues en y_1 et y_2 , bornées uniformément par rapport à t .

H₄ : $k_p(\cdot)$, $k_v(\cdot)$ sont des fonctions scalaires réelles positives telles que:

$$(2.5) \quad \forall (y_1, y_2, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, T[\quad k_p(y_1, y_2, t) = \mu k_v(y_1, y_2, t) \\ (\mu \text{ réel positif})$$

A partir des relations (2.1), (2.2), (2.3), et (2.4), nous obtenons le modèle d'erreur suivant:

$$(2.6) \quad \ddot{\varepsilon}(t) + C(x(t), \dot{x}(t), t) \varepsilon(t) + D(x(t), \dot{x}(t), t) \dot{\varepsilon}(t) + W(t) = 0$$

avec

$$(2.7a) \quad C(\cdot) = M^{-1}(\cdot) \left[\hat{M}(\cdot) k_p(\cdot) + \Delta E(\cdot) \right]$$

$$(2.7b) \quad \Delta E(\cdot) = E(\cdot) - \hat{E}(\cdot)$$

$$(2.7c) \quad D(\cdot) = M^{-1}(\cdot) \left[\hat{M}(\cdot) k_v(\cdot) + \Delta F(\cdot) \right]$$

$$(2.7d) \quad \Delta F(\cdot) = F(\cdot) - \hat{F}(\cdot)$$

$$(2.7e) \quad W(\cdot) = M^{-1}(\cdot) \left[G(\cdot) + M(\cdot) u_r(\cdot) - \hat{H}(\cdot) + \Delta E(\cdot) x_r(\cdot) + \Delta F(\cdot) \dot{x}_r(\cdot) \right]$$

C'est sur les trajectoires de ce modèle d'erreur que nous travaillerons par la suite. Puisque le but de la poursuite est d'obtenir des trajectoires $(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t))$ se rapprochant de $(0, 0)$, nous nous intéresserons plus particulièrement au problème de la stabilité de l'équation (2.6). Nous dirons que le système (2.6) est "stable" si toutes les grandeurs intervenant dans l'ensemble des équations précédentes sont bornées.

Nous allons montrer dans cette étude préliminaire que le choix de $\hat{M}(\cdot)$ joue un rôle primordial pour la stabilité de l'équation (2.6). Nous allons en fait essayer de déterminer par une approche heuristique, les conditions que doit à priori satisfaire $\hat{M}(\cdot)$ pour pouvoir espérer obtenir cette propriété de stabilité.

Pour cela, plaçons nous dans le cas favorable où :
 $\hat{H} = G + M_{ur}$ et où $\Delta E = \Delta F = 0$ et faisons l'hypothèse simplificatrice supplémentaire que M est une matrice s.d.p constante. Il est alors naturel de choisir une matrice \hat{M} ainsi que des gains k_p et k_v constants. Dans ces conditions l'équation d'erreur (2.6) se réduit à :

$$(2.10) \quad \ddot{\varepsilon}(t) + k_p B \varepsilon(t) + k_v B \dot{\varepsilon}(t) = 0$$

avec :

$$(2.11) \quad B = M^{-1} \hat{M}$$

Lemme 1 Si les valeurs propres de la matrice B sont réelles, alors l'équation (2.10) est stable (exponentiellement stable) si et seulement si les valeurs propres de B sont toutes positives.

Démonstration

L'équation différentielle linéaire du second ordre (2.10) est équivalente au système du premier ordre suivant:

$$(2.12) \quad \dot{\Sigma} = \mathcal{A} \Sigma$$

avec :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \dot{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline -k_p B & -k_v B \end{array} \right]$$

Ce système est exponentiellement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de \mathcal{A} sont à partie réelle négative.

Soit x un vecteur propre de B et λ la valeur propre associée
 alors $\begin{bmatrix} x \\ \lambda x \end{bmatrix}$ avec λ solution de l'équation du second degré :

$$(2.13) \quad \lambda'^2 + k_v \lambda \lambda' + k_p \lambda = 0$$

est un vecteur propre de \mathcal{A} admettant λ' comme valeur propre associée.
En effet

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \begin{bmatrix} x \\ \lambda' x \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \lambda' x \\ -k_p Bx - k_v \lambda' Bx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda' x \\ -(k_p \lambda + k_v \lambda' \lambda) x \end{bmatrix} \\ &= \lambda' \begin{bmatrix} x \\ \lambda' x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Désignons par λ'_1 et λ'_2 les deux racines de l'équation (2.13), nous avons:

$$\lambda'_1 + \lambda'_2 = -k_v \lambda$$

$$\lambda'_1 \lambda'_2 = k_p \lambda$$

Il en résulte que si λ est positif, les racines λ'_1 et λ'_2 sont soit réelles négatives, soit complexes conjuguées à partie réelle négative.

Si λ est négatif, alors une des racines est nécessairement réelle positive.

La démonstration est complète si l'on remarque que les $2n$ valeurs propres de sont toutes obtenues à partir des n valeurs propres de B et de l'équation (2.13).

Lemme 2 Supposons que k_p et k_v soient tels que $k_p = \mu k_v$ avec $\mu > 0$. Il existe alors un réel positif k tels que pour $k_v > k$ le système (2.10) est exponentiellement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de B sont à partie réelle positive.

Démonstration

Nous avons vu que les valeurs propres de λ' de sont reliées aux valeurs propres λ de B par l'équation (2.13). Les racines de (2.13) s'écrivent:

$$\begin{aligned}\lambda' &= -\frac{k_v}{2} \lambda \pm \sqrt{\frac{k_v^2}{4} \lambda^2 - k_p \lambda} \\ &= -\frac{k_v}{2} \lambda \pm \sqrt{\frac{k_v^2 \lambda^2}{4} \left(1 - \frac{4\mu}{k_v \lambda}\right)}\end{aligned}$$

En faisant tendre k_v vers l'infini, nous obtenons :

$$\lambda' \approx -\frac{k_v}{2} \lambda \pm \frac{k_v}{2} \lambda \left(1 - \frac{2\mu}{k_v \lambda}\right)$$

Soit :

$$\begin{aligned}\lambda_1' &\approx -k_v \lambda \\ \lambda_2' &\approx -\mu\end{aligned}$$

La conclusion du lemme 2 en résulte immédiatement. Ces deux dernières relations montrent aussi que l'accroissement simultané des gains k_p et k_v ($k_p = \mu k_v$) a pour effet de faire tendre la moitié des valeurs propres de A vers l'infini et l'autre moitié vers la valeur réelle négative $-\mu$. Les valeurs propres de A tendant vers l'infini correspondent à un régime transitoire de l'équation (2.10) très rapidement amorti si et seulement si elles sont situées dans le demi plan gauche, c'est à dire si et seulement si toutes les valeurs propres de B sont à partie réelle positive.

La réunion des lemmes 1 et 2 indique que pour obtenir la stabilité de l'équation d'erreur (2.6) il sera prudent de choisir la matrice $\hat{M}(\cdot)$ de sorte que la matrice $B(\cdot) = M^{-1}(\cdot) \hat{M}(\cdot)$ ait toujours ses valeurs propres à partie réelle positive. Cette condition n'est bien sûr pas "nécessaire" au sens littéral du terme puisque nous avons seulement raisonné sur le cas où M est constante. Il est en effet possible que certaines trajectoires de (2.6) soit encore stables sans que cette condition sur B soit réalisée. La stabilité globale ne résultera cependant qu'à la suite d'un heureux hasard de circonstance.

Lemme 3 Si \hat{M} est une matrice symétrique définie positive alors $B = M^{-1} \hat{M}$ a toutes ses valeurs propres réelles positives et le système (2.10) est exponentiellement stable.

Ce résultat est une simple conséquence du lemme 1 et du fait que le produit de deux matrices symétriques définies positives est une matrice dont toutes les valeurs propres sont réelles et positives.

Ce dernier lemme nous fournit un moyen simple de construire des fonctions $\hat{M}(\cdot)$ possédant de bonnes propriétés vis à vis de la stabilité de l'équation d'erreur (2.6). Par la suite nous supposons en fait que:

H₅ : $\hat{M}(y_1, y_2, t)$ est une matrice symétrique définie positive telle que $||\hat{M}^{-1}(\cdot)||$ est bornée supérieurement sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, T[$ par un réel positif $\frac{1}{\delta}$.

La dernière condition signifie que nous interdisons à la plus petite valeur propre de $\hat{M}(\cdot)$ de pouvoir tendre vers 0, c'est à dire que nous interdisons à la matrice $\hat{M}(\cdot)$ de pouvoir tendre vers une matrice singulière. Rappelons que dans H_1 la même condition a été imposée à $M(\cdot)$.

En choisissant \hat{M} s.d.p nous avons vu qu'automatiquement la matrice B avait toutes ses valeurs propres réelles positives. Si nous imposons à B de satisfaire la propriété plus forte d'être définie positive, alors \hat{M} ne peut plus être choisie s.d.p. quelconque. Deux choix évidents pour lesquels cette propriété est satisfaite sont: i) $\hat{M} = I$, alors $B = M^{-1}$ et ii) $\hat{M} = M$, alors $B = I$. Si la matrice \hat{M} est proche de M tout en étant différente de M nous pouvons nous demander dans quelle mesure la matrice B reste définie positive. Pour étudier ce cas, posons:

$$(2.14) \quad \Delta M(\cdot) = M(\cdot) - \hat{M}(\cdot)$$

alors :

$$(2.15) \quad B(\cdot) = I + M^{-1}(\cdot) \Delta M(\cdot)$$

et une condition suffisante pour que $B(\cdot)$ soit définie positive est:

$$(2.16) \quad ||M^{-1}(\cdot) \Delta M(\cdot)|| < 1$$

Une condition encore plus forte est la suivante:

$$(2.17) \quad ||\Delta M(\cdot)|| < \lambda_{\min}(M(\cdot)) \quad : \text{ plus petite valeur propre de } M(\cdot)$$

Nous verrons par la suite que le cas où $B(\cdot)$ est une matrice définie positive joue un rôle particulier dans l'étude de stabilité de l'équation (2.6).

2 - 3 Théorème d'existence, de stabilité et de comportement des trajectoires de l'équation d'erreur

Avant d'énoncer les principaux résultats de cette étude de commande non linéaire, nous devons introduire une hypothèse supplémentaire portant sur la matrice $\hat{M}(\cdot)$.

H : $\hat{M}(\cdot)$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^n \times [0, T[$ continuellement différentiable sur $\mathbb{R}^n \times [0, T[$ et telle que: $\hat{M}(x(t), t)$ est borné sur toute trajectoire $(x(t), \dot{x}(t))$ bornée. ($\dot{\hat{M}}(x(t), t) = \frac{d}{dt} M(x(t), t)$)

Théorème 1

Si les hypothèses H_1-H_6 sont satisfaites alors il existe une fonction scalaire positive réelle $k(\cdot)$ de $(y_1, y_2, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, T[$, continue en y_1 et y_2 , bornée uniformément par rapport à t , telle que si:

$$k_v(\cdot) \geq k(\cdot)$$

où $k_v(\cdot)$ est aussi continue en y_1 et y_2 et est bornée uniformément par rapport à t , alors:

1) Les trajectoires $(x(t), \dot{x}(t))$ existent sur $[0, T[$ quelque soit la condition initiale $(x(0), \dot{x}(0))$

2) $\varepsilon(t)$ et $\dot{\varepsilon}(t)$ sont uniformément bornées par rapport aux conditions initiales $((\varepsilon(0), \dot{\varepsilon}(0))$ appartenant à un compact C , il existe un réel positif $K(C)$ tel que:

$$\forall t \in [0, T[, ||\varepsilon(t)|| < K(C) \text{ et } ||\dot{\varepsilon}(t)|| < K(C)) .$$

3) $x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t), u(x(t), \dot{x}(t), t)$ sont uniformément bornés par rapport aux conditions initiales.

4) L'erreur de position $\varepsilon(t)$ vérifie l'équation suivante:

$$(2.18) \quad \dot{\varepsilon}(t) = -L(t) \varepsilon(t) + \eta(t)$$

avec :

$$\cdot \eta(0) = \dot{\varepsilon}(0) + \mu \varepsilon(0)$$

• $\eta(t)$: uniformément bornée par rapport aux conditions initiales.

• $-L(t)$: matrice exponentiellement stable (c.a.d. que

l'état $z(t)$ du système homogène :

$\dot{z}(t) = -L(t)z(t)$ converge exponentiellement vers 0).

5) Si de plus $k_v \geq \alpha k(.)$ avec $\alpha \geq 1$

alors:

$$(2.19a) \quad \dot{\varepsilon}(t) = -L_\alpha(t) \varepsilon(t) + \eta_\alpha(t)$$

avec :

$$(2.19b) \quad L_\alpha(.) \xrightarrow{\alpha \rightarrow +\infty} \mu I \quad \text{uniformément sur l'intervalle } [0, T[$$

et

$$(2.19c) \quad \forall t \in]0, T[\quad ; \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \eta_\alpha(t) = 0$$

La démonstration de ce théorème est donnée dans l'annexe A. Cette démonstration s'inspire des travaux de Kokotovic sur les systèmes à deux échelles de temps. L'existence de ces deux échelles de temps se retrouve d'ailleurs dans le résultat 5 du théorème 1 lorsque α devient grand, c'est à dire lorsque les gains $k_p(.)$ et $k_v(.)$ sont grands.

Nous pouvons en effet distinguer pour l'équation (2.19a) un régime "transitoire" rapide (pendant lequel $\eta_\alpha(t)$ devient rapidement petit) et un régime "stationnaire" lent obtenus en faisant tendre α vers l'infini. Nous avons alors pour t suffisamment grand:

$$(2.20) \quad \dot{\varepsilon}(t) \approx -\mu \varepsilon(t)$$

Une interprétation de ce phénomène, vis à vis des valeurs propres de l'équation d'erreur, a déjà été donnée au paragraphe 2-2 dans le cas de systèmes linéaires invariants.

La relation (2.19) est remarquable en ce qu'elle montre qu'il est possible de régler le taux de décroissance exponentielle de l'erreur $\varepsilon(t)$ indépendamment des caractéristiques du système à commander et de faire tendre ce taux vers la valeur μ égale au rapport des gains $k_p(.)$ et $k_v(.)$.

- Remarques :
- i) Le résultat de stabilité du théorème 1 est obtenu sans aucune hypothèse de différentiabilité des matrices du système que l'on commande.
 - ii) En faisant tendre l'instant final T vers $+\infty$, nous obtenons l'existence et la bornitude uniforme de toutes les trajectoires sur \mathbb{R}^+ .

Corollaire 1 : Une fonction $k(\cdot)$ pour laquelle le théorème 1 s'applique est la suivante:

$$(2.21) \quad k(\cdot) = \left\| \hat{M}^{-1/2}(\cdot) M(\cdot) \hat{M}^{-1/2}(\cdot) \right\| \left\{ \sqrt{\frac{\|\hat{M}(\cdot)\|}{\delta}} \left(\frac{n}{\mu} \|\Delta E(\cdot)\| \quad \|M^{-1}(\cdot)\| \right. \right. \\ \left. \left. + (n+1) \|\Delta F(\cdot)\| \quad \|M^{-1}(\cdot)\| + (n+1)\mu \right) + K \sqrt{\|\hat{M}(\cdot)\|} \|W(\cdot)\| \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \|\hat{M}(\cdot)\| \quad \|\hat{M}^{-1}(\cdot)\| + 2\mu \right\}$$

où . K est un réel positif quelconque

. $\hat{M}^{1/2}(\cdot)$ est la matrice racine carrée symétrique définie positive de la matrice $\hat{M}(\cdot)$.

Cette fonction $k(\cdot)$ est en fait la fonction utilisée dans la démonstration du théorème 1.

Dans le cas particulier où \hat{M} est choisie symétrique définie positive constante, la fonction $k(\cdot)$ de la relation (2.21) s'écrit :

$$(2.22) \quad k(\cdot) = \left\| \hat{M}^{-1/2} M(\cdot) \hat{M}^{-1/2} \right\| \left\{ \sqrt{\|\hat{M}\| \quad \|\hat{M}^{-1}\|} \left(\frac{n}{\mu} \|\Delta E(\cdot)\| \quad \|M^{-1}(\cdot)\| \right. \right. \\ \left. \left. + (n+1) \|\Delta F(\cdot)\| \quad \|M^{-1}(\cdot)\| + (n+1)\mu \right) + K \|W(\cdot)\| + 2\mu \right\} \\ (\hat{M} = \text{cste})$$

Dans le cas où $\hat{M} = I$ (matrice identité), cette fonction se réduit à:

$$(2.23) \quad k(\cdot) = \|M(\cdot)\| \left\{ \frac{n}{\mu} \|M^{-1}(\cdot)\| \quad \|\Delta E(\cdot)\| + (n+1) \|M^{-1}(\cdot)\| \quad \|\Delta F(\cdot)\| \right. \\ \left. + K \|W(\cdot)\| + (n+3)\mu \right\} \\ (\hat{M}=I)$$

Remarques : i) Nous constatons que pour construire la fonction $k(\cdot)$ à partir de la relation (2.21) il n'est pas nécessaire de connaître les fonctions $M(\cdot)$, $E(\cdot)$, $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ qui définissent le système que l'on commande. Pour construire le gain $k_v(\cdot) \geq k(\cdot)$ il suffit de connaître des fonctions majorantes de $\|\Delta E(\cdot)\|$, $\|\Delta F(\cdot)\|$, $\|W(\cdot)\|$, $\|\hat{M}(\cdot)\|$, $\|\hat{M}^{-1}(\cdot)\|$, $\|M^{-1}(\cdot)\|$ et $\|\hat{M}^{-1/2}(\cdot) M(\cdot) \hat{M}^{-1/2}(\cdot)\|$.

Cette remarque est importante car elle signifie qu'il est possible de calculer des commandes stables du système (2.1) à partir d'une connaissance minimale de ce système. Autrement dit, nous disposons d'un moyen de calculer des commandes possédant de bonnes propriétés de "robustesse" vis à vis des erreurs de modélisation du système à commander.

ii) La fonction $k(\cdot)$ de la relation (2.21) ne constitue qu'un exemple de fonction pour laquelle la stabilité du système en boucle fermée est démontrée.

Il est clair que pour certains cas particuliers où nous disposons d'informations supplémentaires sur le système à commander, il est possible de trouver des fonctions $k(\cdot)$ plus "petites" que celle de la relation (2.21). Par exemple dans le cas des commandes dynamiques exactes (c'est à dire lorsque les fonctions $M(\cdot)$, $E(\cdot)$, $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ sont exactement connues et sont utilisées dans la commande de façon à effectuer le découplage linéaire évoqué au début du paragraphe 2.2) il est facile de montrer par une méthode de Lyapunov que $k(\cdot) = \text{cste}$, positive quelconque permet de retrouver les résultats d'existence et de stabilité du théorème 1.

iii) L'hypothèse H_4 selon laquelle le rapport $\mu = k_p(\cdot)/k_v(\cdot)$, est une constante peut être affaiblie. Il est en effet aisé d'étendre la démonstration du théorème 1 au cas où $\mu(\cdot)$ est une fonction positive de t , bornée, continuellement dérivable et de dérivée bornée.

Corollaire 2: Si l'hypothèse H_6 de différentiabilité de $\hat{M}(\cdot)$ est remplacée dans le théorème 1 par l'hypothèse suivante:

$$\begin{array}{l} \underline{H_7} \quad \left[\begin{array}{l} \hat{M}(y_1, y_2, t) \text{ est telle que:} \\ a) \quad B(\cdot) = M^{-1}(\cdot) \hat{M}(\cdot) \text{ est une matrice définie positive} \\ b) \quad \forall (y_1, y_2, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, T[, 0 < \delta < \lambda_{\min} \left(\frac{B(y_1, y_2, t) + B^T(y_1, y_2, t)}{2} \right) \\ \\ (\lambda_{\min} A = \text{plus petite valeur propre de } A) \end{array} \right. \end{array}$$

alors une fonction $k(\cdot)$ possible est la suivante:

$$(2.24) \quad k(.) = \frac{1}{\beta(.)} \left\{ \frac{n}{\mu} \|\Delta E(.)\| \|M^{-1}(.)\| + (n+1) \|\Delta F(.)\| \|M^{-1}(.)\| + K \|W(.)\| + (n+3)\mu \right\} \quad (K > 0)$$

$$\text{où } \beta(.) = \lambda_{\min} \left(\frac{B(.) + B^T(.)}{2} \right)$$

La démonstration de ce corollaire est donnée dans l'annexe B.

L'hypothèse H_7 permet de s'affranchir de la condition de différentiabilité de $\hat{M}(\cdot)$ ainsi que de l'utilisation de cette dérivée dans l'expression de la fonction $k(\cdot)$. Nous avons vu au paragraphe 2.2 qu'une façon de réaliser cette hypothèse consiste à choisir $\hat{M}(\cdot)$ proche de $M(\cdot)$.

La relation (2.24) souligne aussi l'intérêt de se rapprocher autant que possible du choix idéal (2.8), c'est à dire l'intérêt d'avoir des fonctions $(\hat{M}-M)$, ΔE , ΔF et W de normes minimales de façon à obtenir une fonction $k(\cdot)$ la plus petite possible.

Corollaire 3 : Si dans le théorème 1 l'inégalité:

$$k_v(\cdot) \geq k(\cdot)$$

est affaiblie et est remplacée par :

$$\forall (y_1, y_2, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, T[\quad , \quad k_v(y_1, y_2, t) \geq k(y_1, y_2, t)$$

$$\text{lorsque: } \|y_1 - x_r(t)\| > K_1 > 0$$

ou

$$\text{lorsque: } \|y_2 - \dot{x}_r(t)\| > K_2 > 0$$

alors les résultats 1) 2) et 3) du théorème 1 sont encore vrais.

Démonstration:

Il suffit, d'après la démonstration du théorème 1, de montrer que toutes les trajectoires $(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t))$ initialisées dans un compact C quelconque, si elles existent sur $[0, T[$, sont bornées par un réel positif indépendant de t .

Prenons par exemple:

$$C = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \|z_1\| \leq K_3 \text{ et } \|z_2\| \leq K_3\}$$

(tout compact de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ peut être recouvert par un compact de cette forme)

et faisons une démonstration par contradiction.

Supposons donc qu'il existe une trajectoire $(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t))$ initialisée dans C pour laquelle il existe:

i) un premier instant $t_1 > 0$ tel que

$$||\varepsilon(t_1)|| = K \text{ avec } ||\dot{\varepsilon}(t_1)|| \leq K$$

ou

$$||\dot{\varepsilon}(t_1)|| = K \text{ avec } ||\varepsilon(t_1)|| \leq K$$

$$\text{avec : } K > \sup (K_1, K_2, K_3)$$

ii) un instant $t_2 \geq t_1$ tel que:

$$||\varepsilon(t_2)|| > K' \text{ ou } ||\dot{\varepsilon}(t_2)|| > K'$$

où $K' (>K)$ est un réel positif dépendant uniquement de K.

Il est clair que si cette hypothèse est fausse alors toutes les trajectoires $(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t))$ initialisées dans C sont bornées par K' .

En raison de la continuité des fonctions $\varepsilon(t)$ et $\dot{\varepsilon}(t)$, l'instant t_2 appartient nécessairement à un intervalle de temps $[t_3, t_4[$ tel que:

$$||\varepsilon(t_3)|| = K \text{ avec } ||\dot{\varepsilon}(t_3)|| \leq K$$

ou

$$||\dot{\varepsilon}(t_3)|| = K \text{ avec } ||\varepsilon(t_3)|| \leq K$$

et tel que:

$$\forall t \in [t_3, t_4[, \quad ||\varepsilon(t)|| \geq K \text{ ou } ||\dot{\varepsilon}(t)|| \geq K$$

Prenons t_3 comme nouvel instant initial et t_4 comme instant final. Le théorème 1 s'applique sur l'intervalle de temps $[t_3, t_4[$ pour la trajectoire particulière qui nous intéresse. Il en résulte que sur $[t_3, t_4[$ cette trajectoire est bornée par un réel positif K'' dépendant uniquement de K et indépendant du temps. En prenant $K' = K''$ nous obtenons donc:

$$||\varepsilon(t_2)|| \leq K' \text{ et } ||\dot{\varepsilon}(t_2)|| \leq K'$$

ce qui contredit ii) de notre hypothèse de départ.

Cette hypothèse de départ est donc fausse, d'où le résultat du Corollaire 3.

L'intérêt du Corollaire 3 est de permettre d'étendre l'ensemble des fonctions $k_v(.)$ pour lesquelles la bornitude uniforme de toutes les grandeurs est assurée. Le Corollaire 3 signifie en effet que $k_v(x(t), \dot{x}(t), t)$ peut être quelconque tant que les erreurs de poursuite $\varepsilon(t)$ et $\dot{\varepsilon}(t)$ restent petites.

Il est cependant évident qu'en pratique le gain $k_v(.)$ sera toujours choisi positif, puisqu'un gain négatif aurait génériquement pour effet de rendre le système instable et de faire diverger les erreurs $\varepsilon(t)$ et $\dot{\varepsilon}(t)$.

Des exemples d'application de ce corollaire pour le calcul de commandes de manipulateurs seront donnés par la suite.

Corollaire 4 : Propriété de robustesse des commandes à grands gains constants

k_p et k_v :

(Sous l'hypothèse supplémentaire que toutes les fonctions intervenant dans les hypothèses H_1 et H_3 sont continues par morceaux en t).

Soit C un compact de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Il existe un réel positif $k(C)$ tel que si : $k_v(.) \geq k(C)$ alors les résultats 1) à 5) du théorème 1 sont vrais pour l'ensemble des trajectoires $(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t))$ initialisées dans C .

Nous pouvons en particulier choisir $k_v = \text{cste}$ telle que $k_v \geq k(C)$

La démonstration de ce corollaire est évidente si l'on remarque que toute fonction $k(.)$ satisfaisant les conditions du théorème 1 est uniformément bornée pour un réel positif $k(C)$ pour toute trajectoire $(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t))$ initialisée dans C . Il suffit alors de reprendre l'énoncé du théorème 1 avec une fonction $k_v(.)$ choisie telle que $k_v(.) \geq k(C)$ pour obtenir l'énoncé du corollaire 4.

Ce corollaire formalise la propriété de robustesse des commandes à grands gains constants k_v et k_p . Il signifie en effet qu'il suffit de choisir dans le calcul de la commande un gain k_v constant suffisamment grand pour que l'ensemble des trajectoires $(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t))$ initialisées dans un compact C soient uniformément bornées. Si ce compact C est remplacé par un compact plus grand, il suffit alors de choisir un gain k_v plus grand.

Le comportement asymptotique des trajectoires donné par le résultat 5) du théorème 1 est de plus conservé c'est à dire qu'il suffit de prendre k_v très grand pour que les trajectoires initialisées dans C vérifient après un régime transitoire rapide :

$$\dot{\epsilon}(t) \cong -\mu \epsilon(t)$$

Les implications pratiques de ce corollaire pour la commande des manipulateurs seront évoquées plus en détail au chapitre suivant.

III - Application au problème de la commande de manipulateurs

3.1 - Modèle mathématique d'un manipulateur à n degrés de liberté

Il est maintenant bien connu que les équations dynamiques d'un manipulateur peuvent être obtenues par l'intermédiaire de plusieurs formalismes possibles (Newton, Euler,...). Un modèle mathématique général pour les manipulateurs rigides a la forme suivante [5].

$$(3.1) \quad M(x) \ddot{x} + F(x, \dot{x}) \dot{x} + G(x, \dot{x}, t) = u$$

où

- . x est la valeur des n coordonnées généralisées,
- . \dot{x} sa dérivée par rapport au temps (vecteur vitesse),
- . \ddot{x} sa dérivée seconde (vecteur accélération).
- . $M(x)$ est la matrice d'énergie cinétique ou matrice d'inertie du manipulateur. Elle est symétrique définie positive et pour des raisons de structure d'un manipulateur aucune de ses valeurs propres ne peut tendre vers 0. Elle vérifie donc l'hypothèse H_2 .
- . u est le vecteur des forces et couples uniquement produit par les actionneurs agissant sur le manipulateur.
- . $F(x, \dot{x})\dot{x}$ est le vecteur regroupant les forces de Coriolis et les forces centrifuges agissant sur le manipulateur lors d'un mouvement. Ce vecteur peut encore se mettre sous la forme (voir [9] par exemple).

$$(3.2) \quad F(x, \dot{x})\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}^T & V^1(x) \dot{x} \\ \vdots & \vdots \\ \dot{x}^T & V^n(x) \dot{x} \end{bmatrix}$$

où les matrices $V^i(x)$ sont des matrices ($n \times n$) symétriques ne dépendant que de x et possédant certaines propriétés structurelles pouvant être exploitées lors du calcul de la commande.

- . $G(x, \dot{x}, t)$ est le vecteur opposé au vecteur regroupant l'ensemble des "forces parasites" agissant sur le manipulateur, telles que forces de gravité, forces de frottement visqueux et forces de frottement sec.

Les fonctions $M(x)$, $F(x, \dot{x})$ et $G(x, \dot{x}, t)$ satisfont l'hypothèse H_1 .

La relation (3.1) correspond à l'équation dynamique d'un manipulateur quelconque pour une charge donnée. Dans l'hypothèse où cette charge varie dans le temps, une relation plus générale est obtenue en écrivant que $M(.)$ et $F(.)$ sont aussi des fonctions du temps.

Dans tous les cas, il apparaît que les équations de tout manipulateur idéalement rigide est un cas particulier de l'équation (2.1) considérée au chapitre précédent. L'étude faite au chapitre précédent, et l'ensemble des résultats démontrés s'appliquent donc intégralement au problème de la commande de manipulateurs rigides.

Il est en fait possible de tenir compte des propriétés structurelles des manipulateurs pour préciser certains de ces résultats et donner des méthodes pratiques pour le calcul de commandes stables et robustes.

3.2 - Classification de quelques commandes

Rappelons la relation (2.4) qui définit l'ensemble des commandes que nous considérons :

$$(3.3a) \quad u(t) = \hat{M}(.) [-k_p(.) \mathcal{E}(t) - k_v(.) \dot{\mathcal{E}}(t)] + \hat{E}(.)x(t) + \hat{F}(.)\dot{x}(t) + \hat{H}(.)$$

(où : $(.) = (x(t), \dot{x}(t), t)$)

avec :

$$(3.3b) \quad k_p(.) = \mu k_v(.) \quad (\mu > 0)$$

Nous choisirons en général :

$$(3.3c) \quad \hat{E}(.) = 0$$

puisque $E(.)$ sera généralement nul dans le cas des manipulateurs.

Ces commandes sont donc entièrement déterminées par le choix de $\hat{M}(.)$, $\hat{F}(.)$, $\hat{H}(.)$, $k_v(.)$ et μ .

Nous avons vu au chapitre II, que dans le but d'obtenir la stabilité du système en boucle fermée, le choix de \hat{M} , \hat{F} et \hat{H} était très libre et qu'il était toujours possible de contrebalancer les effets néfastes d'un mauvais choix de ces fonctions par un choix adéquat du gain $k_v(.)$.

a) commandes dynamiques

Nous avons vu (paragraphe 2.2) qu'un choix idéal de \hat{M} , \hat{F} et \hat{H} vis à vis de la stabilité du système en boucle fermée était :

$$\hat{M}(\cdot) = M(\cdot) , \hat{F}(\cdot) = F(\cdot) , \hat{H}(\cdot) = M(\cdot)u_r(t) + G(\cdot)$$

Ce choix correspond en effet aux commandes "dynamiques exactes" qui transforment le problème initial de commande non-linéaire en un problème beaucoup plus simple de commande d'un système linéaire invariant du second ordre. Une fonction $k(\cdot)$ satisfaisant le théorème 1 est alors la fonction :

$$k(\cdot) = k \text{ où } k \text{ est une constante positive quelconque.}$$

Il suffit donc de choisir $k_v(\cdot) \gg k$ pour obtenir la bornitude uniforme de toutes les grandeurs dépendant du temps, ceci quelle que soit la condition initiale ($\dot{\epsilon}(0)$, $\dot{\epsilon}(0)$).

L'inconvénient majeur de ce choix est qu'il n'est pas réalisable en pratique puisque les matrices $M(\cdot)$, $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ d'un manipulateur (qui est un système physique) ne sont jamais connues exactement. Toute commande dynamique est donc en pratique une commande "dynamique approchée" qui réalise de façon incomplète le découplage linéaire du système et dont la stabilité peut être analysée à l'aide du théorème 1. Lorsque la matrice $\hat{M}(\cdot)$ est proche de la matrice $M(\cdot)$ nous avons vu qu'une fonction $k(\cdot)$ possible était donnée par la relation (2.24). Dans le cas contraire, une fonction $k(\cdot)$ plus générale est donnée par la relation (2.21).

b) \hat{M} est une matrice constante

Une commande plus simple à calculer est obtenue en choisissant :

$$\hat{M}(\cdot) = \hat{M} \text{ (matrice constante positive diagonale), } \hat{F}(\cdot) = 0, \hat{H}(\cdot) = 0.$$

Nous obtenons ainsi une commande du type P.D. (Proportionnelle-Dérivée) qui "force" le découplage entre les différents degrés de liberté du manipulateur et qui de par sa conception fait abstraction des forces de coriolis, des forces centrifuges, des forces de gravité et autres forces parasites. Le théorème 1 permet encore d'analyser la stabilité de cette commande et une fonction $k(\cdot)$ possible est donnée par la relation (2.22).

Une commande particulière est obtenue en posant $\hat{M}(\cdot) = I$ et une fonction $k(\cdot)$ correspondante est donnée par la relation (2.23).

Une commande un peu plus générale est obtenue en choisissant $\hat{M}(\cdot)$ égale à une matrice symétrique définie positive constante quelconque.

c) commandes adaptatives

A partir de plusieurs paramétrisations possibles de l'équation (3.1) (voir [12]), il est possible de procéder à "l'identification" en ligne des matrices $M(\cdot)$, $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$ et d'utiliser les identifiés $\hat{M}(t)$, $\hat{F}(t)$, $\hat{G}(t)$ de ces matrices dans le schéma de commande. Nous obtenons ainsi des commandes adaptatives de type indirect dont plusieurs ont été étudiées dans la littérature sur la commande de manipulateurs [9] [11]. L'importance, pour le bon conditionnement de la commande, du choix de la paramétrisation de l'équation (3.1) est expliquée dans [12] où il est déjà suggéré que les bonnes performances de certains schémas de commande adaptative découlent moins de leurs capacités d'adaptation (étroitement liées aux performances de l'identification) que de l'utilisation de grands gains k_p et k_v dans l'expression de l'algorithme de commande, ou que de l'obtention heureuse de tels gains en cours d'adaptation.

Plusieurs résultats de simulation présentés dans [11] semblent étayer cette interprétation. Pour confirmer ou nuancer ce point de vue, il serait bien entendu intéressant que d'autres chercheurs ayant expérimenté sur des manipulateurs des algorithmes de commande adaptative confrontent leurs résultats avec cette interprétation qui est formalisée dans le corollaire 4 au théorème 1.

3.3 - Utilisation de grands gains constants k_p et k_v : avantages et inconvénients

Il est naturel de vouloir utiliser dans le calcul de la commande, lorsque c'est possible, des gains constants k_p et k_v .

Dans le cas non réaliste où nous disposons d'un modèle parfait du manipulateur, c'est-à-dire dans le cas où nous connaissons parfaitement les fonctions $M(\cdot)$, $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$, nous avons vu qu'il suffisait de choisir dans la commande dynamique exacte des gains k_p et k_v positifs quelconques pour assurer la stabilité globale du système en boucle fermée.

Dans tous les autres cas, le corollaire 4 du théorème 1 montre qu'il suffit de choisir des gains k_p et k_v suffisamment grands pour assurer la stabilité locale du système en boucle fermée ("locale" parce que la stabilité est assurée si l'erreur ($\epsilon(0)$, $\dot{\epsilon}(0)$) initiale n'est pas trop grande). L'utilisation de grands gains permet d'autre part de régler la dynamique de l'erreur $\epsilon(t)$ indépendamment de la structure du manipulateur (résultat 5 du théorème 1).

L'ensemble de ces résultats ne font que traduire la propriété de robustesse des commandes à grands gains par rapport aux erreurs faites sur la modélisation du manipulateur.

Si nous voulons calculer la commande d'un manipulateur en utilisant des gains k_p et k_v constants, nous nous trouvons devant deux alternatives : i) ou bien nous soignons la modélisation des équations dynamiques du manipulateur, c'est-à-dire que nous nous dotons du moyen de calculer des matrices $\hat{M}(\cdot)$, $\hat{F}(\cdot)$, $\hat{G}(\cdot)$ proches de $M(\cdot)$, $F(\cdot)$ et $G(\cdot)$, et nous pouvons alors utiliser des gains k_p et k_v relativement petits.

ii) ou bien nous négligeons l'aspect modélisation du manipulateur (ce qui nous donne alors une grande liberté de choix pour $\hat{M}(\cdot)$, $\hat{F}(\cdot)$ et $\hat{G}(\cdot)$) et nous devons contrebalancer les déficiences de la modélisation par l'utilisation de grands gains k_p et k_v .

Une contrepartie évidente de l'utilisation de grands gains dans la commande est que nous augmentons ainsi la "bande passante" du système en boucle fermée, ce qui a par exemple comme effet néfaste de rendre le système plus sensible aux erreurs faites sur la mesure de $x(t)$ et $\dot{x}(t)$.

Illustrons ce phénomène par l'étude succincte suivante.

Supposons que le système à commander satisfasse l'équation linéaire :

$$(3.4) \quad m \ddot{x} = u \quad (m, x, u : \text{scalaires}) \quad (m > 0)$$

cette équation est un cas particulier de l'équation (3.1).

Considérons la commande suivante :

$$(3.5) \quad u = -k_p y_p - k_v y_v$$

avec

$$(3.6a) \quad y_p = x + \varepsilon_p$$

$$(3.6b) \quad y_v = \dot{x} + \varepsilon_v$$

ε_p et ε_v étant des bruits de mesures stationnaires supposés blancs et de matrice de covariance.

$$(3.7) \quad Q = E \left[\begin{bmatrix} \varepsilon_p(t), \varepsilon_v(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_p(t), \varepsilon_v(t) \end{bmatrix}^T \right]$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_p & 0 \\ 0 & \sigma_v \end{bmatrix}$$

Le but de cette commande est bien sûr de faire tendre $x(t)$ et $\dot{x}(t)$ vers 0 pour t tendant vers l'infini (ce qui revient à considérer la trajectoire de référence définie par

$$u_r(t) = 0, \quad x_r(0) = 0, \quad \dot{x}_r(0) = 0).$$

En boucle fermée ce système s'écrit sous forme d'équation d'état :

$$(3.8) \quad \dot{\Sigma} = A\Sigma + v(t)$$

avec

$$\Sigma = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_p}{m} & -\frac{k_v}{m} \end{bmatrix}, \quad v(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k_p}{m} \end{bmatrix} \epsilon_p(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k_v}{m} \end{bmatrix} \epsilon_v(t)$$

Calculons maintenant la matrice de variance d'erreur :

$$(3.9) \quad P(t) = E [\Sigma(t) \Sigma^T(t)]$$

Cette matrice vérifie l'équation :

$$(3.10) \quad \dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T + V$$

où

$$(3.11) \quad V = E [v(t) v(t)^T] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_p^2 \sigma_p + k_v^2 \sigma_v}{m^2} \end{bmatrix}$$

soit lorsque le régime stationnaire est atteint ($\dot{P} = 0$)

$$(3.12) \quad AP + PA^T = -V$$

La résolution de cette équation nous donne

$$(3.13) \quad P = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_p}{2} + \frac{k_v^2}{2k_p} \sigma_v & 0 \\ 0 & \frac{k_p}{2m} \sigma_p + \frac{k_v}{2mk_p} \sigma_v \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sigma_p}{2} + \frac{\sigma_v}{2\mu^2} & 0 \\ 0 & \frac{k_p}{m} \left(\frac{\sigma_p}{2} + \frac{\sigma_v}{2\mu^2} \right) \end{bmatrix} \quad (\mu = \frac{k_p}{k_v})$$

Cette relation établit clairement que l'erreur en position n'est pas affectée par l'utilisation de grands gains, alors que le carré de l'erreur en vitesse est proportionnel au gain k_p .

L'utilisation de grands gains dans la commande rend donc l'erreur en vitesse plus sensible aux erreurs de mesure de x et \dot{x} , sans pour autant que la propriété de stabilité globale du système en soit affectée.

Cette sensibilité vis à vis des erreurs de mesures peut se traduire dans la pratique de la commande de manipulateurs par l'apparition d'un phénomène de vibrations néfaste pour les actionneurs.

Une seconde limitation des commandes à grands gains apparaît aussi dans le cas d'utilisation de commandes numériques, c'est-à-dire dans le cas de commandes constantes par morceaux. A partir d'un modèle simplifié de manipulateur linéaire invariant, il est en effet aisé de montrer que l'emploi de gains trop importants dans la commande conduit à l'instabilité du système. Une façon de remédier à ce problème, consiste bien sûr, lorsque c'est possible, à réduire la taille du pas d'échantillonnage, ce qui a pour effet de rendre plus grande la borne supérieure des gains admissibles dans la commande.

Supposons d'autre part que le but de la commande du manipulateur soit d'atteindre une position terminale avec une vitesse nulle, et supposons aussi que les forces de frottement sec soient négligeables. Autour de cette position terminale, la matrice d'inertie du manipulateur est quasiment constante et les forces de Coriolis, ainsi que les forces centrifuges et les forces de frottement visqueux, sont petites (puisque $\dot{x} \approx 0$). L'équation du manipulateur se réduit alors, en première approximation, à :

$$M \ddot{x} + G = u$$

où M est constante et où $G (\approx \text{cste})$ est l'opposé des forces de gravité autour de la position terminale. Il paraît alors raisonnable de commuter sur une commande de type P.I.D. (Proportionnelle, Intégrale, Dérivée) de la forme :

$$u(t) = - \hat{M} \left[k_p \epsilon(t) + k_v \dot{\epsilon}(t) + k_i \int_{t_0}^t \epsilon(s) ds \right]$$

lorsque x est proche de x_r et \dot{x} est petite, de façon à faire tendre l'erreur $\epsilon(t) = x(t) - x_r(t)$ vers 0. Grâce au terme d'intégration, l'erreur statique pourra tendre vers 0 sans que les gains k_p et k_v soient importants.

Nous avons évoqué cette situation particulière pour illustrer par un exemple le fait que si le choix de grands gains dans la commande permet de s'affranchir (vis à vis de la stabilité du système en boucle fermée) des erreurs de modélisation du manipulateur, ce choix n'est certainement pas nécessaire dans toutes les configurations du manipulateur.

Il est donc des situations pour lesquelles l'utilisation de grands gains dans la commande est nécessaire pour la stabilité du système (intuitivement ces situations se produisent lorsque x et \dot{x} varient rapidement, c'est-à-dire lorsque le caractère non linéaire des équations du manipulateur est prépondérant) et des situations pour lesquelles l'utilisation de grands gains est inutile et même néfaste en raison de la présence de bruits de mesure.

L'ensemble des considérations que nous venons d'exposer nous conduit à penser que le meilleur choix pour la fonction $k_v(.)$ n'est pas une fonction constante, que l'on est obligé de choisir grande pour des raisons de stabilité, mais une fonction variable dans le temps adaptée à toutes les configurations du manipulateur.

Le théorème 1 et ses corollaires, ainsi que les exemples de fonctions $k(.)$ donnés dans les relations (2.21)-(2.24), nous donnent justement la possibilité de construire de telles fonctions $k_v(.)$. C'est cette possibilité que nous exploitons au paragraphe suivant en nous aidant des propriétés structurelles communes à tous les manipulateurs.

3.4 - Utilisation des propriétés structurelles des manipulateurs dans le calcul du gain $k_v(.)$

Les fonctions $\hat{M}(.), \hat{F}(.)$ et $\hat{H}(.)$ étant choisies de façon à satisfaire les hypothèses H_3, H_5 et H_6 , il suffit d'après l'énoncé du théorème 1 de choisir une fonction $k_v(.) \geq k(.)$ pour obtenir la stabilité du système en boucle fermée.

Un exemple de fonction $k(.)$ est donné par la relation (2.21) que nous rappelons

$$(3.14) \quad k(.) = \left\| \hat{M}^{1/2}(.)\hat{M}^{1/2}(.)\hat{M}^{1/2}(.)\right\| \left[\sqrt{\left\| \hat{M}^{1/2}(.)\right\|} \left((n+1) \left\| \Delta F(.)\right\| \left\| \hat{M}^{-1}(.)\right\| + (n+1)\mu \right) + K \sqrt{\left\| \hat{M}(.)\right\|} \left\| W(.)\right\| + \frac{1}{2} \left\| \hat{M}(.)\right\| \left\| \hat{M}^{-1}(.)\right\| + 2\mu \right]$$

($K > 0$)

Soit maintenant : $m(\cdot)$, $\hat{m}(\cdot)$, $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ et $\hat{h}(\cdot)$, cinq fonctions scalaires positives de (y_1, y_2, t) , continues en y_1 et y_2 , uniformément bornées par rapport à t et telles que

$$\begin{aligned} (3.15) \quad m(\cdot) &\geq \|M(\cdot)\| \\ \hat{m}(\cdot) &\geq \|\hat{M}(\cdot)\| \\ f(\cdot) &\geq \|\Delta F(\cdot)\| \\ g(\cdot) &\geq \|G(\cdot)\| \\ \hat{h}(\cdot) &\geq \|\hat{H}(\cdot)\| \end{aligned}$$

de telles fonctions existent en raison des hypothèses faites sur $M(\cdot)$, $\hat{M}(\cdot)$, $\Delta F(\cdot)$, $G(\cdot)$ et $\hat{H}(\cdot)$.

Soit d'autre part une fonction scalaire positive $\hat{m}_d(t)$ bornée telle que :

$$(3.16) \quad \forall (x(t), \dot{x}(t), t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, T[, \hat{m}_d(t) \geq \|\hat{M}(t)\|$$

Nous avons aussi (relation (2.7e))

$$(3.17) \quad W(\cdot) = M^{-1}(\cdot) [G(\cdot) + M(\cdot)u_r(t) - \hat{H}(\cdot) + \Delta F(\cdot)\dot{x}_r(\cdot)]$$

d'où nous déduisons :

$$(3.18) \quad \|W(\cdot)\| \leq M^{-1}(\cdot) \left[\|G(\cdot)\| + \|\hat{H}(\cdot)\| + \|\Delta F(\cdot)\| \|\dot{x}_r(t)\| \right] + \|u_r(t)\|$$

Cette dernière inégalité montre que la fonction scalaire positive suivante :

$$(3.19) \quad w(\cdot) = \frac{1}{\sigma} [g(\cdot) + \hat{h}(\cdot) + f(\cdot) \|x_r(t)\|] + \|u_r(t)\|$$

est un exemple de fonction continue en y_1, y_2 , uniformément bornée en t telle que :

$$(3.20) \quad w(\cdot) > \|W(\cdot)\|$$

un exemple de fonction $k_v(\cdot)$ vérifiant l'inégalité : $k_v(\cdot) \geq k(\cdot)$ est alors la suivante :

$$(3.21) \quad k_v(\cdot) = m(\cdot) \left[\sqrt{\hat{m}(\cdot)} (k_1 f(\cdot) + k_2 + k_3 w(\cdot)) + k_4 \hat{m}_d(\cdot) + k_5 \right]$$

où :

$$(3.22) \quad k_1 \geq \frac{(n+1)}{\sigma(\hat{\sigma})^{3/2}}, \quad k_2 \geq \frac{(n+1)\mu}{(\hat{\sigma})^{3/2}}, \quad k_3 > 0, \quad k_4 \geq \frac{1}{2(\hat{\sigma})^2}, \quad k_5 \geq \frac{2\mu}{\hat{\sigma}}$$

Les fonctions $\hat{m}(\cdot)$, $\hat{h}(\cdot)$, $\hat{m}_d(\cdot)$, $\|\dot{x}_r(t)\|$, $\|u_r(t)\|$ peuvent être directement déterminées à partir du choix que l'utilisateur a fait pour $\hat{M}(\cdot)$, $\hat{H}(\cdot)$, $\dot{x}_r(\cdot)$ et $u_r(\cdot)$.

Pour pouvoir calculer le gain $k_v(\cdot)$ de la relation (3.21) il reste donc à calculer des fonctions $m(\cdot)$, $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$ satisfaisant la relation (3.15).

calcul de $m(\cdot)$

Une propriété physique des manipulateurs est que la matrice d'inertie $M(\cdot)$ dépend seulement de la position x et que chaque composante de cette matrice augmente au maximum en $\|x\|^2$. Il en résulte qu'il sera toujours possible de choisir pour $m(\cdot)$ une fonction polynomiale en $\|x\|$ du second degré de la forme :

$$(3.23) \quad m(x) = a + b \|x\| + c \|x\|^2$$

où : a , b , c sont des constantes positives que l'on pourra déterminer en tenant compte des variations de masse et de géométrie de la charge transportée par le manipulateur.

Si nous possédons des renseignements supplémentaires sur la structure de la matrice d'inertie $M(\cdot)$, il sera souvent possible de trouver des fonctions $m(\cdot)$ majorant $\|M(\cdot)\|$ de façon moins brutale que la fonction (3.23).

Par exemple, si le manipulateur ne fonctionne qu'en rotation, alors la matrice d'inertie $M(\cdot)$ est bornée supérieurement par une matrice constante dont la norme pourra servir de fonction $m(\cdot)$.

En pratique, $m(x(t), t)$ sera de toute façon toujours bornée supérieurement en raison des bornes physiques du manipulateur.

En tenant compte du fait que $x_r(t)$ est borné, le corollaire 3 du théorème 1 permet encore de prendre pour $m(\cdot)$ une fonction polynomiale en $\|\epsilon(t)\|$ du second degré de la forme :

$$(3.24) \quad m(x(t), t) = a + b \|\epsilon(t)\| + c \cdot \|\epsilon(t)\|^2$$

L'intérêt de (3.24) par rapport à (3.23) est de permettre de construire des fonctions $k_v(\cdot)$ prenant de petites valeurs lorsque l'erreur $\epsilon(t)$ est petite.

Les forces de frottement visqueux étant typiquement proportionnelles à la vitesse \dot{x} , elles pourront être majorées en norme par une fonction de la forme : $r \|\dot{x}\|$.

Les forces de frottement sec, qui peuvent atteindre des valeurs importantes, sont généralement très difficiles à modéliser. Il faudra le plus souvent effectuer une étude spécifique à chaque manipulateur pour pouvoir estimer ces forces. Notons cependant qu'à faible vitesse ces forces sont bornées et pourront être majorées en norme par une fonction constante.

Le but de ce paragraphe était de montrer que le calcul de fonctions $k_v(.)$ admissibles pour le théorème 1 peut se faire à partir d'une connaissance très faible du manipulateur que l'on veut commander. Il n'en demeure pas moins qu'il sera toujours souhaitable en pratique d'intégrer dans le calcul de $k_v(.)$ le maximum de connaissances que l'on a du manipulateur de façon à obtenir une commande répondant le mieux possible aux performances souhaitées.

3.5 - Commande d'un manipulateur dans un repère de coordonnées opérationnelles :

Il se peut dans la pratique que la trajectoire de référence que doit suivre le manipulateur soit exprimée dans un repère plus pratique que celui des coordonnées généralisées du manipulateur. Les coordonnées de ce repère dit "opérationnel" peuvent par exemple être les trois coordonnées dans un repère cartésien fixe de l'extrémité du bras terminal du manipulateur, et les trois angles d'Euler dans ce repère fixe caractérisant l'inclinaison du bras terminal.

Nous montrons que, moyennant quelques modifications de notation, l'analyse du chapitre II s'applique encore au cas de commandes de manipulateur calculées à partir des coordonnées opérationnelles du manipulateur.

Soit y le vecteur de coordonnées opérationnelles correspondant au vecteur x des coordonnées généralisées du manipulateur, et soit $f(x)$ la fonction supposée continue dérivable en tout point qui permet de passer de x à y .

$$(3.27) \quad y = f(x)$$

soit aussi $J(x)$ la matrice jacobienne de $f(.)$ définie comme :

$$(3.28) \quad J(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$$

Nous supposons que la matrice jacobienne est connue ou calculable

en tout point et que nous pouvons donc l'utiliser dans le calcul de la commande.

Nous supposons aussi pour simplifier que cette matrice est inversible en tout point (si J n'est pas inversible nous pouvons considérer une matrice pseudo-inverse de cette matrice (voir [5])).

Nous avons vu que l'équation dynamique générale d'un manipulateur s'écrit :

$$(3.29) \quad M(x) \ddot{x} + N(x, \dot{x}, t) = u$$

$$\text{où} \quad N(x, \dot{x}, t) = F(x, \dot{x})\dot{x} + G(x, \dot{x}, t)$$

Il est immédiat, à partir des relations (3.27) et (3.28), de montrer que cette équation induit l'équation suivante

$$(3.30) \quad M'(x) \ddot{y} + N'(x, \dot{x}, t) = V$$

avec

$$(3.31) \quad u(t) = J^T(x(t)) V(t)$$

$$(3.32a) \quad M'(x) = J^{-T}(x) M(x) J^{-1}(x) \quad : \text{matrice définie positive}$$

$$(3.32b) \quad N'(x, \dot{x}, t) = -M'(x) W(x, \dot{x}) - J^{-T}(x) N(x, \dot{x}, t)$$

$$(3.32c) \quad W(x, \dot{x}) = \begin{bmatrix} \dot{x}^T & W^1(x) \dot{x} \\ \dot{x}^T & W^n(x) \dot{x} \end{bmatrix}$$

où W^1 est la dérivée de la première ligne de J par rapport à x

Puisque :

$$\begin{aligned} x &= f^{-1}(y) \quad \text{et} \quad \dot{x} = J^{-1}(x) \dot{y} \\ &= J^{-1}(f^{-1}(y)) \dot{y} \end{aligned}$$

nous voyons que l'équation (3.30) peut encore s'écrire :

$$(3.33) \quad M''(y) \ddot{y} + N''(y, \dot{y}, t) = V$$

avec

$$(3.34) \quad M''(y) = M'(x) ; \quad N''(y, \dot{y}, t) = N'(x, \dot{x}, t)$$

L'équation (3.33) a bien la même forme que l'équation générale (2.1) que nous avons considérée dans cette étude.

Pour calculer à partir des coordonnées opérationnelles une commande $u(t)$ stable, nous pouvons donc calculer dans un premier temps, en appliquant les résultats du chapitre II au système (3.33), une commande $V(t)$ de la forme (2.4) avec maintenant : $\mathcal{E}(t) = y(t) - y_r(t)$. La commande $u(t)$ se déduit ensuite de $V(t)$ par la relation (3.31).

Remarquons que par cette méthode nous pourrions calculer une commande $V(t)$ stable sans avoir à inverser la matrice Jacobienne $J(x)$ puisque nous avons vu que la détermination d'un gain $k_v(.)$ satisfaisant le théorème 1 était possible sans la connaissance exacte des matrices $M''(y) = J^{-T}(x)M(x)J^{-1}(x)$ et $N''(y, \dot{y}, t) = -J^{-T}(x)M(x)J^{-1}(x)W(x, \dot{x}) + J^T(x)N(x, \dot{x}, t)$.

CONCLUSION

La présente étude a été conçue dans un but d'aide à la conception de commandes de manipulateurs. Chaque manipulateur ayant des caractéristiques qui lui sont propres, et les tâches à accomplir pouvant être de difficulté très inégale, il est évident que prôner à priori l'emploi d'une commande plutôt qu'une autre n'a pas beaucoup de sens. Nous avons donc essayé de localiser un certain nombre de difficultés liées au problème général de la commande de manipulateurs et d'indiquer des directions pour résoudre ces problèmes.

Le désir d'une grande souplesse d'emploi du manipulateur et de performances élevées conduit à vouloir réaliser des commandes à la fois robustes et performantes. Dans un premier temps, l'étude du problème de commande d'un système non-linéaire de forme générale nous a permis de dégager une classe importante de commandes non linéaires globalement stables et robustes. Cette étude trouve son application naturelle dans la commande des systèmes mécaniques et plus particulièrement des manipulateurs.

Le concept intuitif selon lequel il faut utiliser des grands gains dans la commande pour contrebalancer les effets néfastes d'une mauvaise modélisation du manipulateur a été formalisé. L'étude fait cependant ressortir que même dans le cas d'une modélisation très pauvre, l'utilisation de grands gains dans la commande est seulement nécessaire à certains endroits névralgiques de la trajectoire du manipulateur. Il apparaît d'autre part que la robustesse de la commande à la fois vis à vis des erreurs de modélisation et vis à vis des erreurs de mesures ne peut être obtenue qu'avec une adaptation en temps réel des gains de la commande. L'exploitation du théorème 1 et de ses corollaires fournit à l'utilisateur le moyen de calculer de tels gains sans que la connaissance des caractéristiques exactes du manipulateur soit nécessaire.

En ce sens, certaines commandes proposées peuvent être qualifiées d'adaptatives bien que l'adaptation soit de nature différente de celle des commandes adaptatives classiques. L'idée d'adaptation est en effet ici dominée par celle de robustesse, tant dans les commandes que dans la méthode de calcul de ces commandes.

Une extension naturelle de cette étude se fera dans le cadre de simulations des schémas de commande proposés pour des modèles réalistes de manipulateurs. Ces simulations, qui sont actuellement en cours, devront permettre d'établir une "carte" de commandes sur laquelle seront évaluées les principales caractéristiques des différentes commandes, telles que leur coût calcul, leurs performances et leur degré de robustesse.

REMERCIEMENTS

L'auteur tient à remercier A. BENVENISTE ainsi que M. LEBORGNE qui par leur attention et leurs remarques constructives l'ont aidé à mettre en forme et à rédiger ce rapport.

ANNEXE A

Démonstration du théorème 1

Soit un compact C de départ dans lequel sont initialisées les trajectoires $(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t))$. Les trajectoires de références $(x_r(t), \dot{x}_r(t))$ étant bornées uniformément par hypothèse, les trajectoires $(x(t), \dot{x}(t))$ sont aussi initialisées dans un compact dont la taille dépend de la taille de C et de la borne uniforme des trajectoires de référence.

Les hypothèses H_1-H_6 sont supposées satisfaites et nous considérons la fonction $k(.)$ de la relation (2.21) que nous multiplions, pour les besoins de la démonstration, par le scalaire $\frac{\mu}{\mu-\gamma}$ où γ est un réel positif très petit.

$$(A.1) \quad k(.) = \frac{\mu}{\mu-\gamma} \left\| \hat{M}^{-1/2}(.) M(.) \hat{M}^{-1/2}(.) \right\| \left[\sqrt{\frac{\|\hat{M}(.)\|}{\sigma}} \left(\frac{n}{\mu} \|\Delta E(.)\| \|\hat{M}^{-1}(.)\| \right. \right. \\ \left. \left. + (n+1) \|\Delta F(.)\| \|\hat{M}^{-1}(.)\| + (n+1)\mu + K\sqrt{\|\hat{M}(.)\|} \|W(.)\| \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \|\dot{\hat{M}}(.)\| \|\hat{M}^{-1}(.)\| + 2\mu \right] \right.$$

La fonction $k_v(.)$ utilisée dans la commande (2.4) est supposée continue en y_1 et y_2 , uniformément bornée par rapport à t, et elle vérifie l'inégalité:

$$(A.2) \quad k_v(.) \geq k(.)$$

Les propriétés de continuité par rapport à y_1 et y_2 et de bornitude uniforme par rapport au temps de toutes les fonctions que nous avons définies permettent d'affirmer l'existence locale des trajectoires $(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t))$ initialisées dans C sur un intervalle de temps $[0, \tau[$ ($\tau \leq T$) où τ dépend seulement de la taille du compact de départ C (résultat dû à Carathéodory, voir [16] par exemple).

Proposition 1:

Toutes les trajectoires $(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t))$ initialisées dans C sont uniformément bornées sur $[0, \tau[$ par un réel positif $N''(C)$ dépendant seulement de la taille de C (donc indépendant du temps) pour toute fonction $k_v(.)$ vérifiant l'inégalité (A.2).

Démonstration de la proposition 1 :

Considérons l'équation d'erreur (2.6) que nous rappelons:

$$(A.3) \quad \ddot{\epsilon}(t) + C(x(t), \dot{x}(t), t) \epsilon(t) + D(x(t), \dot{x}(t), t) \dot{\epsilon}(t) + W(t) = 0$$

avec :

$$(A.4a) \quad C(.) = M^{-1}(.) \left[\hat{M}(.) k_p(.) + \Delta E(.) \right] \quad (k_p(.) = \mu k_v(.))$$

$$(A.4b) \quad D(.) = M^{-1}(.) \left[\hat{M}(.) k_v(.) + \Delta F(.) \right]$$

Pour étudier la stabilité de cette équation, nous reprenons une méthode utilisée par Kokotovic [13] [14] dans le cas de systèmes linéaires variables dans le temps, que nous étendons au cas de systèmes non-linéaires. Selon cette méthode nous introduisons la variable auxiliaire $\eta(t)$ définie de la façon suivante:

$$(A.5) \quad \eta(t) = \dot{\epsilon}(t) + L(t) \epsilon(t)$$

où $L(t)$ est une matrice $(n \times n)$ solution de l'équation différentielle suivante:

$$(A.6a) \quad \dot{L}(t) = -D(x(t), \dot{x}(t), t)L(t) + C(x(t), \dot{x}(t), t) + L(t)L(t)$$

$$(A.6b) \quad \dot{L}(0) = +\mu I \quad (I: \text{matrice identité})$$

Résultat partiel 1 :

Si une solution $L(t)$ existe sur $[0, \tau[$ alors $L(t)$ est une matrice définie positive bornée en norme par 2μ .

Démonstration du Résultat partiel 1

Posons:

$$(A.7) \quad Q(t) = L(t) - \mu I \quad ; \quad Q(0) = 0$$

Si $L(t)$ existe sur $[0, \tau[$, alors évidemment $Q(t)$ existe aussi sur $[0, \tau[$ et est d'après (A.6a) solution de l'équation différentielle:

$$(A.8) \quad \dot{Q}(t) = -\mu D(x(t), \dot{x}(t), t) + C(x(t), \dot{x}(t), t) - D(x(t), \dot{x}(t), t)Q(t) + (Q(t) + \mu I)^2$$

Pour faciliter la lecture de la démonstration, nous omettrons d'écrire à partir de maintenant les indices des fonctions chaque fois qu'aucune équivoque n'est possible.

En utilisant la définition de C et D (relations (A.4a) et (A.4b) nous avons:

$$(A.9) \quad -\mu D + C = -\mu M^{-1} \Delta F - M^{-1} \Delta E$$

En utilisant cette relation dans (A.8) nous obtenons:

$$(A.10) \quad \dot{Q} = -k_v M^{-1} \hat{M} Q - M^{-1} \Delta F Q - \mu M^{-1} \Delta F - M^{-1} \Delta E + (Q + \mu I)^2$$

Désignons par q_i la i^{eme} colonne de Q :

$$(A.11) \quad Q e_i = q_i, \quad q_i(0) = 0$$

où :

$$(A.12) \quad e_i^T = [0, 0, \dots, 0, 1, 0 \dots 0]$$

↑
i^{eme} rang

Multiplions l'égalité (A.10) à gauche par $q_i^T \hat{M}$ et à droite par e_i , puis ajoutons $\frac{1}{2} q_i^T \hat{M} q_i$ de chaque côté de l'égalité ainsi obtenue. Nous obtenons:

$$(A.13a) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (q_i^T \hat{M} q_i) = -k_v q_i^T \hat{M} M^{-1} \hat{M} q_i + z_i$$

avec :

$$(A.13b) \quad z_i = -q_i^T \hat{M} M^{-1} \Delta F q_i - \mu q_i^T \hat{M} M^{-1} \Delta F e_i - q_i^T \hat{M} M^{-1} \Delta E e_i \\ + q_i^T \hat{M} Q q_i + 2\mu q_i^T \hat{M} q_i + \mu^2 q_i^T \hat{M} e_i + \frac{1}{2} q_i^T \hat{M} q_i$$

Soit U la racine carrée symétrique définie positive de la matrice symétrique définie positive \hat{M}

$$(A.14) \quad \hat{M} = U^2 \quad (\hat{M}^{1/2} = U)$$

et posons:

$$(A.15) \quad y_i = U q_i \quad ; \quad y_i(0) = 0 \quad (y_i(t) \text{ est une fonction continue sur } [0, \tau[)$$

La relation (A.13a) s'écrit encore:

$$(A.16) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||y_i||^2 = -k_v y_i^T U M^{-1} U y_i + z_i$$

En utilisant des inégalités classiques des normes matricielles et en tenant compte de la relation (A.15), nous obtenons la borne supérieure suivante pour $|z_i|$:

$$(A.17) \quad |z_i| \leq ||U|| ||M^{-1}|| ||\Delta F|| ||q_i|| ||y_i|| + \mu ||U|| ||M^{-1}|| ||\Delta F|| ||y_i|| \\ + ||U|| ||M^{-1}|| ||\Delta E|| ||y_i|| + ||U|| ||Q|| ||q_i|| ||y_i|| + 2\mu ||y_i||^2 \\ + \mu^2 ||U|| ||y_i|| + \frac{1}{2} ||U^{-1}||^2 ||\dot{M}|| ||y_i||^2$$

puisque : $q_i = U^{-1} y_i$ nous avons aussi $||q_i|| \leq ||U^{-1}|| ||y_i||$, d'où :

$$(A.18) \quad |z_i| \leq ||U|| ||M^{-1}|| ||U^{-1}|| ||\Delta F|| ||y_i||^2 + \mu ||U|| ||M^{-1}|| ||\Delta F|| ||y_i|| \\ + ||U|| ||M^{-1}|| ||\Delta E|| ||y_i|| + ||U|| ||Q|| ||U^{-1}|| ||y_i||^2 \\ + 2\mu ||y_i||^2 + \mu^2 ||U|| ||y_i|| + \frac{1}{2} ||U^{-1}||^2 ||\dot{M}|| ||y_i||^2$$

Hypothèse

Supposons qu'il existe un premier instant t_1 ($0 < t_1 < \tau$) et une colonne q_i de Q tels que:

$$i) \quad ||y_i(t_1)|| = \sqrt{\hat{\sigma}} \frac{\mu - \gamma}{n} \quad (\hat{\sigma} \text{ est défini dans } H_5)$$

$$ii) \quad \forall j (1 \leq j \leq n), \forall t \in [0, t_1[\quad , ||y_j(t)|| < \sqrt{\hat{\sigma}} \frac{\mu - \gamma}{n}$$

puisque $||Q|| < n \sup ||q_j||$ et $||q_j|| \leq ||U^{-1}|| ||y_j||$
 $1 \leq j \leq n$

nous avons donc à l'instant t_1 :

$$(A.19) \quad ||Q(t_1)|| \leq ||U^{-1}(t_1)|| \sqrt{\hat{\sigma}} (\mu - \gamma)$$

En utilisant cette inégalité dans (A.18) nous obtenons:

$$(A.20) \quad |z_i(t_1)| \leq \frac{(\mu-\gamma)^2}{n^2} \hat{\sigma} \left\{ \frac{||U(t_1)||}{\sqrt{\hat{\sigma}}} \left[\frac{n}{(\mu-\gamma)} ||M^{-1}(t_1)|| ||\Delta E(t_1)|| + (||U^{-1}(t_1)|| \sqrt{\hat{\sigma}} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{n\mu}{\mu-\gamma}) ||M^{-1}(t_1)|| ||\Delta F(t_1)|| + ||U^{-1}(t_1)||^2 \hat{\sigma}(\mu-\gamma) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{n\mu^2}{(\mu-\gamma)} \right] + 2\mu + \frac{1}{2} ||U^{-1}(t_1)||^2 ||\dot{\hat{M}}(t_1)|| \right\}$$

En remarquant que nous avons aussi:

$$1) \quad ||U|| = \sqrt{||\hat{M}||}$$

$$2) \quad ||U^{-1}|| = \sqrt{||\hat{M}^{-1}||} \leq \frac{1}{\hat{\sigma}}$$

$$3) \quad ||U^{-1}||^2 = ||U^{-2}|| = ||\hat{M}^{-1}||$$

La relation (A.20) permet encore d'écrire:

$$(A.21) \quad |z_i(t_1)| < \frac{\mu}{\mu-\gamma} \frac{(\mu-\gamma)^2}{n^2} \hat{\sigma} \left\{ \sqrt{\frac{||\hat{M}(t_1)||}{\hat{\sigma}}} \left[\frac{n}{\mu} ||M^{-1}(t_1)|| ||\Delta E(t_1)|| + \right. \right. \\ \left. \left. + (n+1) ||M^{-1}(t_1)|| ||\Delta F(t_1)|| + (n+1) \mu \right] + 2\mu + \frac{1}{2} ||\dot{\hat{M}}(t_1)|| ||\hat{M}^{-1}(t_1)|| \right\}$$

La matrice $UM^{-1}U$ étant une matrice symétrique définie positive, nous avons d'autre part:

$$(A.22) \quad k_v y_i^T U M^{-1} U y_i \geq \frac{k_v ||y_i||^2}{||U^{-1} M U^{-1}||}$$

et par conséquent:

$$(A.23) \quad k_v y_i^T U M^{-1} U y_i \geq \frac{k ||y_i||^2}{||\hat{M}^{-1/2} M \hat{M}^{-1/2}||} \quad \text{puisque } k_v \geq k$$

En remplaçant maintenant k par son expression (A.1) nous obtenons:

$$(A.24) \quad k_v y_i^T U M^{-1} U y_i \geq \frac{\mu}{\mu-\gamma} ||y_i||^2 \left\{ \sqrt{\frac{||\hat{M}||}{\hat{\sigma}}} \left[\frac{n}{\mu} ||M^{-1}|| ||\Delta E|| + (n+1) ||M^{-1}|| ||\Delta F|| \right. \right. \\ \left. \left. + (n+1) \mu \right] + K \sqrt{||\hat{M}||} ||W|| + \frac{1}{2} ||\dot{\hat{M}}|| ||\hat{M}^{-1}|| + 2\mu \right\}$$

La comparaison des relations (A.21) et (A.24) montre que pour $t=t_1$, nous avons:

$$(A.25) \quad k_v(t_1) y_i^T(t_1) U(t_1) M^{-1}(t_1) U(t_1) y_i(t_1) > |z_i(t_1)|$$

et par conséquent d'après la relation (A.16)

$$(A.26) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||y_i(t_1)||^2 < 0$$

La fonction $y_i(t)$ étant par hypothèse continuellement différentiable sur $[0, \tau[$, l'inégalité (A.26) contredit en fait l'existence de t_1 , puisque $||y_i||$ ne peut atteindre pour la première fois la constante $\sqrt{\delta} \frac{\mu-\gamma}{n}$ qu'avec une dérivée $\frac{1}{dt} ||y_i||$ positive ou nulle en ce point.

L'instant t_1 n'existant pas, il en résulte:

$$(A.27) \quad \forall t \in [0, \tau[, \forall i \in \mathbb{N} (1 \leq i \leq n), ||y_i(t)|| < \sqrt{\delta} \frac{\mu-\gamma}{n}$$

comme d'autre part :

$$(A.28) \quad ||q_i|| \leq \sqrt{||M^{-1}||} ||y_i|| \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} ||y_i||$$

La relation (A.27) entraîne:

$$(A.29) \quad \forall t \in [0, \tau[, \forall i \in \mathbb{N} (1 \leq i \leq n), ||q_i(t)|| < \frac{\mu-\gamma}{n}$$

et cette relation entraîne à son tour:

$$(A.30) \quad \forall t \in [0, \tau[, ||Q(t)|| < \mu-\gamma$$

Des relations (A.7) et (A.30) nous déduisons:

$$(A.31) \quad \forall t \in [0, \tau[, ||L(t)|| \leq 2\mu - \gamma$$

et aussi que la matrice $L(t)$ est définie positive telle que

$$(A.32) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, x^T L(t) x \geq \gamma ||x||^2 \quad (t \in [0, \tau[)$$

Ce qui termine d'établir le résultat partiel 1 et montre aussi que la matrice $-L(t)$ est uniformément exponentiellement stable sur $[0, \tau[$.

$L(t)$ étant bornée pour toute trajectoire $(x(t), \dot{x}(t))$ ($t \in [0, \tau[$) par un réel positif indépendant du temps il en résulte de façon évidente que la solution $L(t)$ existe effectivement sur $[0, \tau[$.

Résultat partiel 2 :

La variable auxiliaire $\eta(t)$ est uniformément bornée sur $[0, \tau[$

Démonstration du résultat partiel 2 :

A partir des relations (A.3), (A.5) et (A.6a) il est immédiat de montrer que $\eta(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante:

$$(A.33) \quad \dot{\eta}(t) = (-D(x(t), \dot{x}(t), t) + L(t))\eta(t) + W(t)$$

Soit encore, en omettant les indices et en utilisant la définition de $D(.)$:

$$(A.34) \quad \dot{\eta} = (-k_v M^{-1} \hat{M} - M^{-1} \Delta F + L)\eta + W$$

En multipliant à gauche cette relation par $\eta^T \hat{M}$ nous obtenons:

$$(A.35) \quad \eta^T \hat{M} \dot{\eta} = -k_v \eta^T \hat{M} M^{-1} \hat{M} \eta - \eta^T \hat{M} M^{-1} \Delta F \eta + \eta^T \hat{M} W$$

Posons:

$$(A.36) \quad z = U\eta \quad (\text{où } U \text{ est la racine carrée symétrique définie positive de } \hat{M})$$

et ajoutons aux deux membres de l'égalité (A.35) le terme $\frac{1}{2} \eta^T \dot{\hat{M}} \eta$.

Nous obtenons:

$$(A.37) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|z\|^2 = -k_v z^T U M^{-1} U z + s$$

avec :

$$(A.38) \quad s = -z^T U M^{-1} \Delta F U^{-1} z + z^T U L U^{-1} z + z^T U W + \frac{1}{2} z^T U^{-1} \dot{\hat{M}} U^{-1} z$$

En utilisant des inégalités classiques de normes matricielles:

$$(A.39) \quad |s| \leq \left[\|U\| \|\hat{M}^{-1}\| \|\Delta F\| \|U^{-1}\| + \|U\| \|L\| \|U^{-1}\| + \frac{\|U\| \|W\|}{\|z\|} + \frac{1}{2} \|U^{-1}\| \|\dot{\hat{M}}\| \|U^{-1}\| \right] \|z\|^2$$

qui entraîne aussi:

$$(A.40) \quad |s| \leq \|z\|^2 \left[\sqrt{\frac{\|\hat{M}\|}{\delta}} (\|\hat{M}^{-1}\| \|\Delta F\| + \|L\|) + \sqrt{\|\hat{M}\|} \frac{\|W\|}{\|z\|} + \frac{1}{2} \|\dot{\hat{M}}\| \|\hat{M}^{-1}\| \right]$$

Nous avons montré précédemment: $||L|| < 2\mu$. De (A.40) nous déduisons par conséquent que si $||z|| > \frac{1}{K}$ alors:

$$(A.41) \quad ||s|| \leq ||z||^2 \left[\sqrt{\frac{||\hat{M}||}{\sigma}} (||M^{-1}|| ||\Delta F|| + 2\mu) + K\sqrt{||\hat{M}||} ||W|| + \frac{1}{2} ||\hat{M}|| ||M^{-1}|| \right]$$

Nous avons d'autre part (relation (A.24))

$$(A.42) \quad k_v z^T U M^{-1} U z > ||z||^2 \left\{ \sqrt{\frac{||\hat{M}||}{\sigma}} \left[\frac{n}{\mu} ||M^{-1}|| ||\Delta E|| + (n+1) ||M^{-1}|| ||\Delta F|| + (n+1)\mu \right] + K\sqrt{||\hat{M}||} ||W|| + \frac{1}{2} ||\hat{M}|| ||M^{-1}|| + 2\mu \right\}$$

Compte tenu de (A.37); la comparaison des relations (A.41) et (A.42) montre que:

$$(A.43) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||z||^2 < 0 \quad \text{lorsque} \quad ||z|| > \frac{1}{K}$$

Il en résulte:

$$(A.44) \quad \forall t \in [0, \tau[, ||z(t)|| \leq \sup \left[||z(0)||, \frac{1}{K} \right]$$

D'autre part; d'après la définition (A.36) de z

$$\eta = U^{-1} z$$

et par conséquent:

$$(A.45) \quad ||\eta|| \leq ||U^{-1}|| ||z|| \leq \frac{1}{\sqrt{\sigma}} ||z||$$

Nous avons aussi par définition de η (relation (A.5)):

$$(A.46) \quad \eta(0) = \dot{\varepsilon}(0) + \mu \varepsilon(0)$$

D'où:

$$(A.47) \quad ||z(0)|| \leq \sqrt{||\hat{M}(0)||} ||\dot{\varepsilon}(0) + \mu \varepsilon(0)|| \quad (\hat{M}(0) = \hat{M}(x(0), 0))$$

Des relations (A.44)-(A.47) nous déduisons:

$$(A.48) \quad \forall t \in [0, \tau[, ||\eta(t)|| \leq \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \sup \left[\sqrt{||\hat{M}(0)||} ||\dot{\varepsilon}(0) + \mu \varepsilon(0)||, \frac{1}{K} \right]$$

Ce qui démontre bien que quelque soit la trajectoire $(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t))$ initialisée dans C , $\eta(t)$ est borné par un nombre positif $N(C)$ dépendant seulement de la taille de C .

Pour terminer la démonstration de la proposition 1, il suffit maintenant de considérer l'équation (A.5). D'après cette équation:

$$(A.49) \quad \dot{\varepsilon}(t) = -L(t) \dot{\varepsilon}(t) + \eta(t) \quad (\eta(t) \leq N(C))$$

d'où :

$$(A.50) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||\varepsilon(t)||^2 = -\varepsilon^T(t) L(t) \varepsilon(t) + \varepsilon^T(t) \eta(t)$$

d'après (A.32):

$$(A.51) \quad \varepsilon^T(t) L(t) \varepsilon(t) \geq \gamma ||\varepsilon(t)||^2$$

Comme d'autre part:

$$(A.52) \quad |\varepsilon^T(t) \eta(t)| \leq ||\varepsilon(t)|| N(C)$$

Il en résulte:

$$(A.53) \quad \frac{d}{dt} ||\varepsilon(t)||^2 < 0 \quad \text{lorsque} \quad ||\varepsilon(t)|| > \frac{N(C)}{\gamma}$$

et :

$$(A.54) \quad \forall t \in [0, \tau[\quad ; \quad ||\varepsilon(t)|| \leq \sup (||\varepsilon(0)||, \frac{N(C)}{\gamma}) \leq N'(C)$$

où $N'(C)$ est un nombre positif qui dépend seulement de la taille de C .

D'autre part, d'après (A.49)

$$(A.55) \quad ||\dot{\varepsilon}(t)|| \leq ||L(t)|| ||\varepsilon(t)|| + ||\eta(t)||$$

et par conséquent, d'après (A.31) et (A.54):

$$(A.56) \quad \forall t \in [0, \tau[\quad , \quad ||\dot{\varepsilon}(t)|| < 2\mu N'(C) + N(C)$$

Les relations (A.54) et (A.56) établissent que les trajectoires $(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t))$ initialisées dans C sont uniformément bornées par $N''(C) = \sup(N'(C), 2\mu N'(C) + N(C))$.

Proposition 2 :

La bornitude uniforme sur $[0, \tau[$ de toutes les trajectoires $(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t))$ initialisées dans C par un nombre $N''(C)$ dépendant seulement de la taille de C entraîne :

- i) l'existence des trajectoires $(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t))$ sur $[0, T[$
- ii) la bornitude uniforme de ces trajectoires par $N''(C)$

Le résultat ii) étant une simple conséquence de i) et de ce que nous venons de montrer, il suffit de montrer que i) est vraie.

Considérons une trajectoire $(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t))$ initialisées dans C et supposons que cette trajectoire n'existe que sur $[0, \tau[$ avec $\tau < T$. Puisque τ n'appartient pas au domaine de définition de $(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t))$ cela signifie que la trajectoire explose en τ . En raison de la continuité de $\varepsilon(t)$ et $\dot{\varepsilon}(t)$ il existe donc un temps $T_c < \tau$ où la trajectoire $(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t))$ sort de la boule $B(0, N''(C))$, ce qui contredit la proposition 1. Donc $\tau = T$ ce qui établit i).

Les résultats 1) à 3) du théorème 1 sont des conséquences directes de la proposition 2 et des hypothèses de continuité et de bornitude uniforme faites sur les différentes fonctions utilisées.

Le résultat 4) a été obtenu en cours de démonstration.

La relation (2.19a) du résultat 5) traduit simplement le fait (aisément vérifiable) qu'en prenant, dans la démonstration de la proposition 1, une fonction $k_v(.)$ suffisamment grande, il est possible de maintenir la matrice $Q(t)$ aussi petite que l'on veut pour toutes les trajectoires $(\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t))$ initialisées dans C , et donc de maintenir la matrice $L(t)$ aussi proche de μI que l'on veut.

En reprenant la démonstration de la bornitude uniforme de $z_\alpha(t)$ (où l'indice α est ajouté pour indiquer que le gain $k_v(.)$ est de la forme $k_v(.) \geq \alpha k(.)$), on montre aisément que $\|z_\alpha(t)\|$ est asymptotiquement borné par $\frac{1}{\alpha K}$ et plus précisément qu'il existe un instant $t(\alpha)$ tel que:

$$(A.57) \quad \forall t > t(\alpha), \quad \|z_\alpha(t)\| < \frac{1}{\alpha K}$$

et :

$$(A.58) \quad \lim_{\alpha \rightarrow \infty} t(\alpha) = 0$$

En remarquant d'autre part que nous avons:

$$(A.59) \quad \|\eta_\alpha(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{\theta}} \|z_\alpha(t)\|$$

nous obtenons bien la relation (2.19b) du résultat 5.

ANNEXE B

Démonstration du Corollaire 2 :

La démonstration de ce corollaire est tout à fait similaire à celle du théorème 1, à ceci près qu'il n'est plus nécessaire d'introduire les variables auxilliaires $y_i(t)$ et $z(t)$ pour montrer les bornitudes respectives de la matrice $Q(t)$ et du vecteur $\eta(t)$.

Bornitude de $Q(t)$

Considérons la relation (A.10) que l'on multiplie à gauche par q_i^T et à droite par e_i . Nous obtenons:

$$(B.1) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||q_i||^2 = -k_v q_i^T B q_i + r_i$$

où

$$(B.2) \quad B = M^{-1} \hat{M} \quad (B \text{ satisfaisant la relation b) du corollaire 2})$$

et :

$$(B.3) \quad r_i = q_i^T M^{-1} \Delta F q_i - \mu q_i^T M^{-1} \Delta F e_i - q_i^T M^{-1} \Delta E e_i + q_i^T Q q_i + 2\mu ||q_i||^2 + \mu^2 q_i^T e_i$$

En utilisant la fonction $k(.)$ de la relation (2.24) et les propriétés de la matrice définie positive B , nous obtenons, en procédant de la même façon que dans la démonstration du théorème 1.

$$(B.4) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||q_i(t_1)||^2 < 0 \quad \text{si} \quad q_i(t_1) = \frac{\mu}{n} \quad \text{et si} \quad q_j(t_1) \leq \frac{\mu}{n}$$

$$(1 \leq j \leq n, j \neq i)$$

Comme pour la démonstration du théorème 1, cette inégalité entraine que l'instant t_1 n'existe pas et que par conséquent:

$$(B.5) \quad \forall t \in [0, \tau] \quad , \quad ||q_i(t)|| < \frac{\mu}{n} \quad (1 \leq i \leq n)$$

d'où :

$$(B.6) \quad \forall t \in [0, \tau] \quad ; \quad ||Q(t)|| < \mu$$

Bornitude de $\eta(t)$

Considérons la relation (A.34) que l'on multiplie à gauche par η^T .
Nous obtenons:

$$(B.7) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||\eta||^2 = - k_v \eta^T B \eta + s$$

avec :

$$(B.8) \quad s = -\eta^T M^{-1} \Delta F \eta - \eta^T L \eta + \eta^T W$$

En utilisant encore une fois l'expression de la fonction $k_v(\cdot)$ qui minore $k_v(\cdot)$, les propriétés de la matrice B et le fait que $||L(t)||$ est borné par 2μ , nous montrons aisément à partir de (B.7) et (B.8):

$$(B.9) \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||\eta(t)||^2 < 0 \quad \text{lorsque} \quad ||\eta(t)|| > \frac{1}{K}$$

ce qui entraîne que $\eta(t)$ est uniformément borné.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. TRUCKENBRODT "Modeling and Control of Flexible Manipulators Structures", *Fourth CISM-IFTO MM Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators*, p.110-120, Zaborow, Poland 1981.
- [2] W.H. SUNADA, S. DUBOWSKY "The Application of Finite Element Methods to the Dynamic Analysis of Flexible Spatial and Co. Planar Linkage Systems", *Transactions of the ASME, Journal of Mechanical Design*, Vol. 103, N°3, p.643-651, 1981.
- [3] R. PAUL et al. "Advanced Industrial Robot Control System", *TR.EE* 79-35, *Purdue University, West Lafayette*, 1979.
- [4] A.K. BEJCZY, "Robot Arm Dynamics and Control", *Jet Propulsion Lab. Tech. Memo* 33-669, 1974.
- [5] O. KHATIB, "Commande Dynamique dans l'Espace Opérationnel des Robots Manipulateurs en Présence d'Obstacles", *Thèse de Docteur Ingénieur*, ENSAE, Toulouse, 1980.
- [6] W. KHALIL, "Contribution à la Commande Automatique des Manipulateurs avec l'aide d'un Modèle Mathématique des Mécanismes", *Thèse d'Etat*, U.S.T.L., Montpellier, 1978.
- [7] J. ZABALA, "Commande des Robots Manipulateurs à partir d'une Modélisation de leur Dynamique", *Thèse de Docteur de Spécialité*, Université Paul Sabatier, 1978.
- [8] S. DUBOWSKY, "On the Adaptive Control of Robotic Manipulators: The Discrete-Time case", *JACC, Charlotteville*, 1981.
- [9] M. TOMIZUKA, R. HOROWITZ, "Applications of Model Reference Adaptive Control Techniques to Mechanical Manipulators", *Colloque de Belle-Ile*, 1982.

- [10] M. TAKEGAKI, S. ARIMOTO, "An Adaptive Trajectory Control of Manipulators", *Int. J. Control*, Vol. 35, N°2, p. 219-230, 1981.
- [11] J.M. IBARRA-ZANNATHA, "Sur la Commande des Robots Manipulateurs ", *Thèse de Docteur Ingénieur, Université de Rennes I*, 1982.
- [12] C. SAMSON, J.M. IBARRA-ZANNATHA , "Sur la Commande des Manipulateurs", *Colloque de Belle-Ile*, 1982.
- [13] P.V. KOKOTOVIC, "Perturbations Singulières en Contrôle Optimal", *Conférence sur les Méthodes de Perturbation en Automatique, Paris*, 26-27 Mai 1982.
- [14] K.D. YOUNG, P.V. KOKOTOVIC, V.I. UTKIN, "A Singular Perturbation Analysis of High Gain Feedback Systems", *IEEE Trans On Automatic Control*, Vol. AC 22, p. 931-938, 1977.
- [15] H ERZBERGER, " Analysis and Design of Model Following Control Systems by State-Space Techniques", *Proc. JACC, Ann Arbor, Mich.* , p.572-581, 1968.
- [16] M. CROUZEIX, A. MIGNOT, "Analyse Numérique des Equations Différentielles", *Masson, Paris*, (à paraître).

